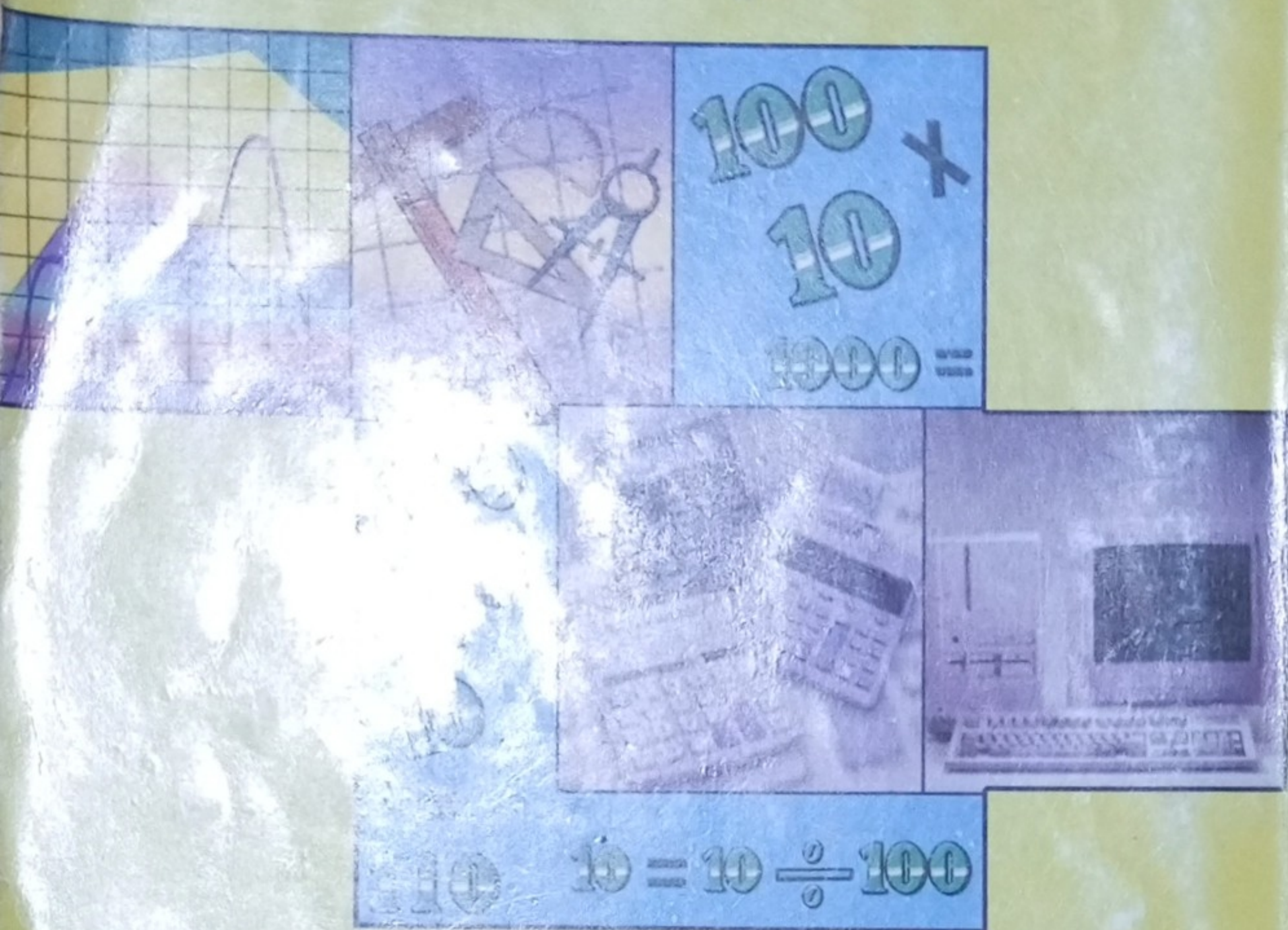


أساسيات طرق التدريس الخاصة في الرياضيات



تأليف

د . غالب محمود الطويل

جامعة التحدي - سرت

أساسيات طرق التدريس الخاصة في الرياضيات

أساسيات طرق التدريس الخاصة في الرياضيات



تأليف

د. غالب محمود الطويل

أستاذ المناهج وأساليب تدريس الرياضيات

بجامعة التحدي

510.7

الطبعة الأولى، 2002 إفرنجي

الكمية، 4000 نسخة

رقم الإيداع، 2001/4258

ردمك، ISBN 9959-805-19-0

دار الكتب الوطنية، بنغازي، ليبيا

☎ 9090509 – 9096379 – 9097074 ☎، 9097073

بريد إلكتروني: nat_lib_libya@hotmail.com

جميع الحقوق محفوظة للناس:

جامعة التحدي، الجماهيرية العظمى

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿إِنَّمَا يَخْشَى اللَّهَ مِنْ عِبَادِهِ الْعُلَمَاءُ﴾

صِرَاطُ اللَّهِ الْعَظِيمِ

[سورة فاطر، الآية 28]

إهداء

إلى كل من يرى في العلم سبيلاً

لحل مشاكل البشرية

لإضاءة الشموع في ظلام الجهل

لنشر الحب والسعادة بين الناس

مقدمة

يُعتبر التعليم العامل الأساسي في الاستقرار السياسي والاجتماعي والاقتصادي للأمة فالتعليم ضروري لإحداث أي تنمية علمية واقتصادية واجتماعية وثقافية وكلما كان المجتمع أكثر تعلماً كلما كان أقل قابلية للتأثر بعناصر التغير المستقبلية والتي قد تكون أحياناً مفاجئة وخطيرة.

وكما أن نوع الأمة يتوقف على نوع المواطنين الذين تتكون منهم وأن نوع المواطنين يتوقف إلى حد كبير على نوع التربية التي يتلقونها فإن أهم العوامل في تقرير نوعية التربية هي نوعية المعلمين^(٤).

من هنا تظهر أهمية المعلم في المجتمع وبضرورة الاهتمام بهذا المعلم في هذا العصر الحديث عصر المعلوماتية والعولمة والتكنولوجيا.

هذا من جهة المعلم أما من جهة المحتوى الدراسي فلقد أصبحت الرياضيات أداة ضرورية للتعامل بين الأفراد فهي لغة اتصال بين الرياضيين وغيرهم وهي المعيار الذي يقاس على ضوئه مستوى تقدم الأمم فتكنولوجيا الحاسوب وغيرها وما تقدمه من خدمات جليلة للشعوب تعتمد بالقدر الكبير على نتائج الرياضيات هذا العلم الذي غدا حلقة الوصل بين الشعوب من حيث إسهامه في حل الكثير من المشكلات الإنسانية ولقد أصبح التفكير الرياضي من مستلزمات العصر والذي يتوجب علينا تعليمه وتنميته لدى المتعلمين.

والعملية التعليمية تهدف أول ما تهدف إلى خلق مناخ تكاملي بين المعلم والمنهاج المدرسي والذي يشمل (الأهداف، المحتوى، الوسائل التعليمية، التقويم) هذا المناخ من شأنه المساعدة في نمو المعلم مهنيًا وتربويًا منذ التحاقه بالجامعة أو المعهد وحتى أثناء الخدمة فالتخطيط لنمو المعلم والتخطيط لتوفير المناهج التي تواكب التطورات والمستجدات على الساحتين المعرفية والتربوية يجب أن يتم في اتجاهين متوازيين في سبيل تحقيق الأهداف.

من هنا كان لابد من تقديم هذا الكتاب ليكون عوناً ومرجعاً للمعلم في المدرسة والطالب المعلم في الجامعة أو المعاهد العليا لإعداد المعلمين ليكون على دراية وفهم كامل لطبيعة وفلسفة المادة التي يقوم بتدريسها وبالاستراتيجيات التي يحتاجها عند قيامه بتدريس هذه المادة الدراسية فنجد في :

الفصل الأول : يقدم صورة مبسطة لمفهوم الأهداف التربوية عامة وأهداف تدريس الرياضية خاصة، فمعلم الرياضيات لابد وأن يكون ملماً بأهداف درسه وكيفية إعدادها لتناسب طلابه في أي مرحلة دراسية.

الفصل الثاني : يتناول طبيعة وفلسفة الرياضيات والاتجاهات الحديثة في تدريسها من حيث المحتوى الدراسي وطرائق التدريس، فمعلم الرياضيات بحاجة ماسة لكي يتفهم طبيعة وفلسفة المادة التي يقوم بتدريسها والتي تختلف عن طبيعة وفلسفة العلوم الأخرى.

الفصل الثالث : يقدم للمعلم والطالب مفهوم التفكير الرياضي وكيف تطور هذا الفكر والذي ساعد في الاكتشافات والمخترعات لأغلب العلوم، وهذا الفكر لم يأتي ببساطة بل بُني على صراعات وجهد لعلماء منذ آلاف السنين.

الفصل الرابع : يتناول بالشرح والتوضيح المفاهيم والمصطلحات الرياضية من حيث أهميتها بالنسبة للأبنية الرياضية وكذلك التعرف على أنواعها وتطبيقاتها المختلفة والاستراتيجيات المتبعة في تدريسها.

الفصل الخامس : يتناول المقصود بالتعميمات وأهميتها وكذلك تطبيقاتها المختلفة والاستراتيجيات المتبعة في تدريسها وتقديم درس لمفهوم التعميمات.

الفصل السادس : يناقش مفهوم البرهان عامة والبرهان الرياضي خاصة وأنواع البراهين وأهميتها وكيفية تدريسها.

الفصل السابع : يتناول بالشرح مفهوم المهارات الرياضية وأنواعها وطرق تدريسها ونماذج لهذه المهارات.

الفصل الثامن والفصل التاسع : يتناول كل منهما نموذجًا من نماذج تعليم الرياضيات والتي أثبتت الدراسات كفاءتهما كطريقتين للتدريس وهما التعليم البرنامجي والتعليم عن طريق الألعاب.

الفصل العاشر : يناقش مفهوم التقويم في التدريس حيث يقدم مفهوم التقويم وكذلك أنواعه ويقدم للمعلم كيفية بناء الاختبارات التقويمية في الرياضيات سواء كانت اختبارات تحصيلية أم اختبارات تقيس الجانب الانفعالي أو العاطفي كالاتجاهات نحو الرياضيات فكثير من المعلمين تنقصهم الخبرة في بناء الاختبارات التحصيلية المقننة أو غيرها من الاختبارات.

وبعد، فهذا المؤلف يعتبر مرجعًا لطلاب الجامعات والمعاهد العليا ولطلبة الدراسات العليا وكذلك لمعلمي الرياضيات.

نرجو أن يكون قد وفقني الله في هذا العمل والذي أمل أن يعود بالفائدة على القراء في هذا البلد المعطاء.

المؤلف

الفصل الأول

الأهداف التربوية

Educational Objectives

- (1-1) مقدمة
- (2-1) الهدف التربوي
- (3-1) مصادر اشتقاق الأهداف التربوية
- (4-1) أهداف تدريس الرياضيات
- (5-1) أهداف تدريس الحاسوب
- (6-1) الأهداف السلوكية
- (7-1) تصنيف الأهداف

الفصل الأول الأهداف التربوية

(1-1) مقدمة

التربية في أصلها عملية تنشئة اجتماعية تهدف إلى تزويد التلاميذ بالخبرات التي تؤهلهم للمشاركة بصورة سليمة في بناء مجتمعهم ولمساعدتهم في مراحل نموهم الشامل ويتم ذلك عن طريق مراعاة اهتماماتهم وميولهم واتجاهاتهم وتحقيق مطالبهم والتي لا تتعارض مع أهداف المجتمع.

والتربية في أي مجتمع تهدف أول ما تهدف إلى تعديل سلوك التلاميذ وتحسين أدائهم بحيث ينعكس ذلك إلى خبرات ومهارات في اكتساب المعلومات وتطبيقها عملياً.

ولكي تحقق التربية أهدافها لابد أن توجه نحو تحقيق غايات وآمال وطموحات واضحة ومخطط لها من قبل الهيئات المسؤولة عن عملية التربية.

(2-1) الهدف التربوي

الهدف هو غاية يسعى المجتمع إلى تحقيقها من خلال تحقيق آمال وطموحات الأفراد والتي يمكن أن تتمثل في نواتج التعلم والتي يسعى النظام التعليمي والتربوي بكل مؤسساته وإمكاناته لتحقيقها، فتحقيق غايات مثل الأمن لكل مواطن والرعاية الصحية للجميع والتعليم لكل فرد وتوفير فرص العمل لكل مواطن وتحقيق الرفاهية والديمقراطية للمجتمع، كل هذه آمال عريضة لا تتحقق في مدى عام أو عامين بل تحتاج إلى سنين طويلة.

وعلى ذلك فالعبارات التي تصف التغيرات أو النواتج المرغوبة أو المرتقبة أو المأمول أن تتحقق من خلال برنامج تربوي تسمى أهدافاً تربوية لهذا البرنامج⁽¹⁾.

ومن جهة أخرى فالهدف التربوي «هو النتيجة النهائية لتعلم ناجح وهو في الوقت نفسه محصلة تشير إلى أن التعليم قد أخذ مكانه فعلاً عند المتعلم أي أنه قد حدث تغير في الأداء والخبرة لديه.

وغالباً فالطرق المتبعة لتحقيق أهداف التربية تتم عن طريق المؤسسات التعليمية مثل المدرسة ووسيلة المدرسة لتحقيق ذلك هو المنهاج المدرسي حيث يتم تحديد أهدافاً لكل مرحلة تعليمية وهو ما يسمى بالمقاصد التعليمية وكذلك يتم تحديد أهداف تدريس كل مادة دراسية مثل الرياضيات والعلوم واللغة العربية والاجتماعية وغيرها. على أنه يجب التمييز بين مجموعة من المصطلحات والتي تمثل نتائج عملية تحليل الأهداف التربوية مثل :

أ - الأغراض التربوية Aims

هي عبارات عامة يمكن من خلالها إعطاء شكل المقاصد واتجاهها في المستقبل والأغراض عبارة عن طموحات تصف بالمثالية وهي أيضاً نهايات مثل تكوين المواطن الصالحة أو تحقيق العدالة الاجتماعية.

ب - الغايات أو المقاصد التربوية Goals

وهذه تمثل أهدافاً أقل عمومية وتمثل الجانب التحليلي للأغراض فعند تحليل غرض مثل المواطن الصالحة إلى مجموعة مقاصد أو غايات مثل اكتساب المعلومات المفيدة واكتساب احترام الغير أو العمل على خدمة بلده أو تنمية التفكير السليم وهكذا.

ج - الأهداف السلوكية Objectives

وهي أهداف محددة وليست عمومية واضحة وهي قصيرة الأمد إجرائية ويمكن قياسها، ونجدها في أهداف الدرس في المدارس والتي تصف الأنشطة التي من المتوقع أن يقوم بها الدارس بعد أن يتعلم.

إذن يمكن القول أن أهداف التربية العامة تتعلق بآمالها وطموحاتها وأن

المقاصد التعليمية خاصة بأهداف التعليم مثل أهداف المرحلة الابتدائية أو الثانوية أو أهداف تدريس الرياضيات والعلوم على أن جميع الأهداف التدريسية لكل مادة دراسية تكون مأخوذة ومشتقة من أهداف التربية عامة.

(3-1) مصادر اشتقاق الأهداف التربوية

أولاً : المجتمع والثقافة

ويتم اشتقاق الأهداف من المجتمع والثقافة عن طريق :

1 - طبيعة المجتمع

فأوضاع المجتمع بما تشمله من تراث ثقافي وحضاري وتغيرات اجتماعية وأساليب حياة وطرق معيشة وكذلك الظروف الطبيعية والجغرافية والموارد الاقتصادية (بتروولية - زراعية - صناعية - ثروات بحرية) ومتطلبات هذه الموارد من ميكنة وتقايي وأسمدة ومصانع وقطع غيار والمشكلات التي يعيشها الأفراد داخل المجتمع.

كذلك نجد عادات المجتمع وتقاليده وثقافته ولغته تجعل من أهم مسؤوليات التربية تبصير الناشئة بهذه الأوضاع وتشخيص وتحليل وترجمة هذه الأوضاع كلها في صورة أهداف تربوية توضح خطط السير والعمل والنمو والتقدم في هذه المجالات من أجل تحقيقها مستقبلاً في هذا المجتمع.

2 - مطالب المجتمع

لكل مجتمع من المجتمعات احتياجات ومطالب، وهذه المطالب تبدأ بالإحساس بالأمن والطمأنينة وتوفير المأكل والملبس والتعليم لأبنائه وتحقيق الحرية والديمقراطية، لذلك فالتربية مطالبة عند وضع أهدافها مراعاة هذه المطالب للعمل على تحقيقها مستقبلاً، ويمكن تحقيق بعض هذه المطالب أو الحاجات في :

أ - الصحة للجميع بحيث يتمتع الناشئة بالجسم والعقل السليمين.

ب - إعداد المواطن لمواجهة الحياة داخل وخارج المدرسة.

ج - إتاحة الفرص التعليمية لكل فرد بما يناسب قدراته و ميوله ، كذلك استعداداته.

د - تنمية الإبداع والابتكار عند التلاميذ.

هـ - التأكيد على الحرية والديمقراطية.

و - معالجة مشكلات المجتمع الحاضرة والمستقبلية على الصعيد الدولي.

ز - المهارة في إجراء العمليات الأساسية مثل القراءة والكتابة والحساب.

ح - إيجاد فرص العمل لكل مواطن قادر على العمل.

ط - الاهتمام بالتربية الخلقية والدينية.

ي - إعداد الناشئة لتقبل التغير والتقدم وحب المهنة وتحمل المسؤولية.

ك - إنماء المهارات الجديدة المرتبطة بالتفكير الجماعي.

ل - إنماء العقل الذي يتعامل مع مشكلات الحياة في عالم متطور متجدد.

م - الاستخدام الجيد لأوقات الفراغ بتوفير أماكن مناسبة لذلك.

ثانياً : طبيعة التلميذ وحاجاته ومطالب نموه

التلميذ محور العملية التعليمية وغايات التربية تقوم أساساً من أجل إعداد الناشئة من التلاميذ، من هنا فالحاجة إلى التأكيد على النظرة الكلية للتلميذ له مكون جسمي ومكون معرفي (عقلي) ومكون انفعالي (عاطفي) ويجب أن نتعامل مع هذه المكونات ككل دينامي ولكي يحافظ المتعلم على كيانهِ يجب أن يشبع حاجات أساسية لديه مثل :

أ - حاجات فسيولوجية كالطعام والشراب.

ب - حاجات اجتماعية مثل الانتماء والشعور بالكرامة والاعتزاز بالنفس والقدرة على تحمل المسؤولية.

ج - حاجات نفسية مثل مراعاة الميول والاتجاهات والصدقة وحب الناس.

د - حاجات خاصة بتحقيق الذات.

ولتحقيق هذه الحاجات كأهداف يجب العمل على :

1 - إجراء مزيد من الدراسات الطولية والعرضية لمراحل النمو وخصائصها التي يمر بها التلميذ من مرحلة الطفولة والمراهقة وحتى وصوله المرحلة الجامعية.

2 - التعرف على مراحل تطور النمو العقلي والعاطفي وكذلك مستويات النضج الاجتماعي للمتعلمين.

3 - دراسة وتتبع عمليات التفكير لدى الدارسين في المراحل العمرية المختلفة.

4 - دراسة العلاقات بين الدارسين ومعلميهم.

5 - دراسة المشكلات التي تقابل الدارسين والتي تحد من تكيفهم الدراسي.

والتربية في تخطيطها لأهدافها يجب أن تراعي هذه الاحتياجات من جهة ومن جهة أخرى فإن هذه المطالب تتغير بنمو التلاميذ من مرحلة عمرية إلى أخرى حسب قدراتهم واستعدادهم ودافعيتهم والتربية أيضاً مطالبة بمراعاة مطالب النمو الاجتماعي للفرد مثل الإعداد للزواج والحياة الأسرية. من هنا فالتربية عند اشتقاقها لأهدافها يجب أن تراعي كل هذه الجوانب والمطالب الخاصة بالتلميذ كفرد في المجتمع.

ثالثاً : فلسفة المجتمع

لكل مجتمع من المجتمعات فلسفته الخاصة به والتي هي نتاج تطور هذا المجتمع والتي عن طريقها تحدد الأفكار والمتغيرات السياسية والتي تنعكس على المجتمع. كذلك فعادات المجتمع وتقاليده والقيم السائدة والعقائد تميز هذا المجتمع عن غيره من المجتمعات، فالمجتمعات التي تنتهج الفلسفة الكلاسيكية تختلف عن

المجتمعات التي تنتهج الفلسفة التقدمية أو البراجماتية من حيث النظرة إلى التربية أو إلى الفرد أو إلى طرق التدريس وغيرها من الأمور، وهذه الفلسفات للمجتمعات تؤثر في أهداف التربية.

رابعاً : المادة الدراسية وطبيعتها

لكل مادة دراسية طبيعتها المميزة لها، فالرياضيات مثلاً مادة تقوم على التجريد والبنى والتراكيب الرياضية المجردة والقائمة على المسلمات والبديهيات والمفاهيم والمعرفات والمبرهنات المبنية على أساس منطقي، بينما المواد العلمية مثل الفيزياء والكيمياء نجد أنها تركز على التجربة العملية والمشاهدة (الملاحظة) ومادة التاريخ تقوم على السرد القصصي للوقائع والحقائق التاريخية، لذلك عند تحديد الأهداف التربوية تراعي التربية عند اختيارها للأهداف التعليمية طبيعة المواد الدراسية وذلك عن طريق :

- أ - فهم أساسيات المواد الدراسية وطبيعتها.
- ب - تحسين دراسة هذه المواد باستخدام طرائق جديدة في التدريس.
- ج - تنمية المهارات الدراسية سواء كانت عملية أو نظرية.
- د - تكوين العادات السليمة للقراءة.
- هـ - مراعاة الأهداف التثقيفية والنفعية للمواد الدراسية، ولناخذ مثاليين من أهداف التربية وهما أهداف تدريس الرياضيات وكذلك أهداف تدريس الحاسوب.

(1-4) أهداف تدريس الرياضيات

يمكن القول بصفة عامة أن الهدف الأساسي من تدريس الرياضيات هو المساهمة في إعداد الفرد للحياة العامة بصرف النظر عن عمله أو اهتماماته المستقبلية، ومن ناحية أخرى المساهمة في إعداد الفرد لمواصلة دراسته في الرياضيات نفسها أو في موضوعات أخرى أثناء وجوده في المدرسة وبعد تخرجه (7).

ولقد تناول الكثير من العلماء بالبحث والدراسة الأهداف الأساسية من تدريس الرياضيات وقد أقرّوا مجموعة من الأهداف، ففي مؤتمر المعلمين العرب السادس لتدريس الرياضيات اقترح أن يهدف تدريس الرياضيات في جميع المراحل إلى :

- 1 - تكوين الأساس الرياضي الحديث من مفاهيم وحقائق ومصطلحات ورموز وأساليب معالجة أساسية مما يعطي التلميذ ثقافة رياضية شاملة وتكون أساساً للدراسة في المراحل التعليمية التالية.
- 2 - إبراز مفهوم البناء الرياضي المشيد على نظام المسلمات والتأكيد على المفاهيم التي تعمل للتوحيد بين الفروع المختلفة للرياضيات إلى جانب استخدام الأسلوب الاستدلالي في جميع الفروع.
- 3 - إبراز أن مجال الدراسة في الرياضيات يشتمل على المؤكدات والاحتمالات وعلى المضبوطات والمقربات وأن الهدف من دراسة العمليات الرياضية هو الوصول إلى نتائج العمليات الرياضية والتعرف على أساليب معالجتها وطرق الوصول إلى هذه النتائج.
- 4 - إدراك أن الرياضيات مادة حية متجددة يمكن أن يشارك التلميذ في صنعها واكتشاف العلاقات الكائنة فيها وابتكار البراهين لتعميمها.
- 5 - أن الحقيقة الرياضية حقيقة نسبية تعتمد أساساً على الفروض والمسلمات التي بُنيت عليها.
- 6 - اكتساب المهارة في معالجة المشكلات الكمية وتحليل البيانات الإحصائية بذكاء.
- 7 - إظهار دور الرياضيات في الإسهام في حل المشكلات الخاصة بالتنمية في المجتمع.
- 8 - الإسهام في تكوين الاستعداد العلمي المدرك لمشاكل الحياة والتخطيط لمحاولة حلها بأفضل الطرق وأيسرها.

9 - تنمية القدرة على الكشف والابتكار وتعويد التلاميذ على عمليتي التجريد والتعميم.

10 - اكتشاف اتجاهات وعادات اجتماعية سليمة مثل الموضوعية في التفكير والدقة في التعبير والقدرة على التنظيم والعمل الهادف واستخدام أساليب التخطيط والتعميم في حل المشكلات الرياضية.

11 - تكوين ميول عند التلاميذ نحو تذوق الرياضيات والاستزادة من دراستها وسبر أغوارها.

12 - إبراز أهمية الرياضيات ليس فقط في العلوم الطبيعية بل أيضا في العلوم الاجتماعية والسلوكية والاقتصادية واللغات وغيرها من المجالات⁽⁴⁸⁾.

ولقد أورد جونسون ورايزنج الأهداف التالية لتدريس الرياضيات⁽³⁴⁾:

1 - تبصير التلاميذ بمقرر الرياضيات ومساعدته على اكتساب كفاية في المفاهيم والمبادئ والمعلومات الرياضية مثل :

أ - تعريف التلميذ وتزويده بعناصر لغة الرياضيات من مصطلحات ورموز ومفاهيم وعلاقات وحقائق.

ب - تنمية القدرة على فهم وتحليل العلاقات الكمية والعلاقات في الفراغ لفهم البيئة التي يعيش فيها التلميذ.

ج - تزويد التلميذ بأساس عام من الكفايات لمتابعة دراسته في الرياضيات وتطبيق المعرفة الرياضية في مواقف أخرى.

2 - فهم البنية المنطقية للمعرفة الرياضية وطبيعة البرهان الرياضي مثل:

أ - تعريف التلميذ باللغة الرياضية ودقة المصطلحات والتعبير المستخدمة وبالدور الذي تلعبه اللغة في إيصال المعرفة الرياضية بدقة ووضوح.

ب - إتاحة الفرصة للتلميذ للتعرف على الطبيعة الاستنتاجية للرياضيات وبالتحديد الدور الخاص الذي يلعبه الأسلوب القائم

على المسلمات والتعرف على بني رياضية هندسية وجبرية متنوعة.

ج - تمكين التلميذ من إدراك البناء الرياضي ومكوناته ومساعدته على تنمية تفكيره المنطقي.

3 - القدرة على إجراء الحسابات بفهم ودقة وكفاءة مثل :

أ - تمكين التلميذ من إجراء الحسابات واكتساب المهارات التي ستفيده في موضوع الرياضيات وفي الحياة العملية والمهنية.

ب - استخدام التلميذ لأكثر من أسلوب واحد أو طريقة للوصول إلى الأجوبة بما في ذلك الجداول والرسوم البيانية والآلات الحاسبة وغيرها.

ج - تشجيع التلميذ على التقريب والتخمين والتقريب ومراجعة الحل.

4 - اكتساب القدرة على حل المسألة ويتم ذلك بـ :

أ - تمكين التلميذ من إدراك الرياضيات كوسيلة لوصف المسائل العملية نظرياً وتمكينه من التعرف على مجالات التطبيق العملي للرياضيات.

ب - تنمية القدرة لدى التلميذ للتمييز بين البيانات ذات العلاقة بموقف معين عن غيرها.

ج - تعزيز التلميذ على تمثيل البيانات المعطاة بأشكال ملائمة لتساعده على فهم المسألة وحلها.

5 - تنمية اتجاهات إيجابية نحو الرياضيات وتذوق جمالها ومتعة العمل بها مثل :

أ - تبصير التلميذ بالقيمة الجمالية للرياضيات وإعطاؤه وافرًا من الفرص ليستمتع بها من خلال العمل المنتج فيها.

ب - إتاحة الفرص للتلميذ للتعرف على الرياضيات كموضوع حي

مستطور على الدوام يتم بناؤه وتطوره على أساس الخبرات والتجارب أو على أساس ما تستلهمه من النظريات والخبرات أو التجارب السابقة.

ج - إكساب التلميذ الثقة بالنفس وحب الاستطلاع والمبادرة في العمل والصبر والثبات.

د - إبراز الدور الذي تلعبه الرياضيات في حياة الأفراد وفي تاريخ الأمم والشعوب.

6 - تطوير طرائق مناسبة في تعليم الرياضيات وإيصال المعرفة الرياضية للآخرين عن طريق :

أ - الاستماع للمناقشات والاشتراك فيها.

ب - تشجيع التعلم الذاتي والمحافظة على استمراريته وذلك من خلال عرض مواقف يحللها التلميذ ويصل بنفسه إلى التعميمات.

ج - تشجيع التلميذ لكي يكتب أفكاره الرياضية بلغة دقيقة وسليمة وواضحة.

د - إتاحة الفرص للتلميذ وتشجيعه لكي يسأل أسئلة هادفة ومحددة.

ولقد قامت نظلة خضر⁽⁴⁸⁾ بتقسيم الأهداف هذه إلى مجموعات خمس كما يأتي :

المجموعة (أ) : أهداف تتعلق بفهم أساسيات الرياضيات أي بفهم المفاهيم والعلاقات والقواعد الرياضية والتركيب الرياضي وطبيعة البرهان.

المجموعة (ب) : أهداف تتعلق بغرس أو تحسين طرق التفكير الرياضية وحل المشكلات أي طرق التفكير الاستقرائية والاستدلالية والطرق الخاصة بالاكشاف الرياضي وأساليب حل المشكلات.

المجموعة (جـ) : أهداف تتعلق بتنمية المهارات (حل المسائل والمشكلات الرياضية).

المجموعة (د) : أهداف تتعلق بتذوق الجمال الرياضي وتقدير وحب الرياضيات لتركيبها الذاتي أو لتطبيقاتها في الحياة أو لدورها في الحياة التقدمية العصرية أو لنموها الزائد المستمر أو من المتعة في تجريبها واكتشافها.

المجموعة (هـ) : أهداف تتعلق بتكوين العادات والاتجاهات السليمة من تعلم الرياضيات، فمثلاً تكوين عادات مثل الدقة في التعبير والتفكير المنطقي في حل المشكلات وخلق الاعتماد على النفس وعادة الدراسة الذاتية ليتمكن الفرد من متابعة الدراسة معتمداً على نفسه وعادة تطبيق المعلومات الرياضية في الحياة العملية وحل مشاكلها عن طريق النماذج الرياضية وتكوين اتجاهات مثل الثقة في الرياضيات والولاء لها واحترام الرياضيين واحترام الفرد لتحصيله في الرياضيات.

(5-1) أهداف تدريس الحاسوب التعليمي

1 - نشر الوعي بالحاسوب والتثقيف عنه في المجتمع المدرسي والجامعي من إداريين ومدرسين وطلاب.

2 - تقديم المعارف الأساسية لتطبيقات الحاسوب ومهارات البرمجة حتى يتمكن الطلاب من اختيار مجالات الدراسة الملائمة في مجال الحاسوب.

3 - إعداد الطلاب الموهوبين وذوي المهارات العالية إعداداً متقدماً في مهارات البرمجة من خلال ممارسة الهوايات بالأندية المدرسية.

4 - استخدام الحاسوب والحاسبات الجيبية كأدوات لحل بعض

- المشكلات في الرياضيات مثل العنود التربوية أو التكنولوجية أو اللوجستيات أو الأعداد الكبيرة.
- 5 - التعرف بتاريخ الحاسوب ونشأته وأجياله والعلماء الذين ساهموا في هذه التطورات لأجيال الحاسوب.
- 6 - إدراك أهمية الإلمام بالمعلومات الأساسية عن الحاسوب.
- 7 - التعرف بأهمية الحاسوب من خلال التعرف على تطبيقاته في الحياة (اجتماعية، اقتصادية، علمية، ترفيهية، ثقافية، ...).
- 8 - استخدام الحاسوب في إدارة وتكوين عملية التدريس.
- 9 - توضيح مفاهيم التثقيف عن الحاسوب والتي تساهم في أو تعتمد على معلومات الرياضيات، ولكي يتحقق ذلك يجب توفر :
- أ - أجهزة ملائمة ومناسبة في كل مختبر حاسوب.
- ب - مستهج متاح وقابل للتطبيق تتوفر فيه مواد تعليمية للطلاب والمدرسين.
- ج - مدرسون متدربون على تدريس واستخدام الحاسوب.
- د - توفير المساعدات العالية لمثل هذه البرامج.
- 10 - معرفة المكونات الأساسية للكمبيوتر (الحاسوب) ووظيفة كل منها وكيفية التمييز بينها.
- 11 - التعرف بذاكرة الكمبيوتر (الحاسوب) وأنواعها ووحدات قياسها.
- 12 - التعرف بأجهزة تخزين معلومات الحاسوب وخصائصها.
- 13 - التعرف بأجهزة عرض معلومات الحاسوب المختلفة وخصائصها.
- 14 - التعرف بأجهزة طباعة معلومات الحاسوب المختلفة وخصائصها.

- 15- التمييز بين تشغيل الحاسوب وبرمجة الحاسوب.
- 16- التعريف بأهم لغات برمجة الحاسوب ومجالات استخدامها ومميزات كل منها.
- 17- فهم الكيفية التي يقوم بها الحاسوب بشرح الدروس مع إبراز الخصائص العملية المتعلقة بذلك مع عرض عملي يوضح ذلك.
- 18- التعريف بالبرنامج المكتوب بلغة «بيسيك» BASIC.
- 19- القدرة على قراءة وكتابة وعمل برامج بلغة BASIC.
- 20- اكتساب خبرة في استعمال بعض التطبيقات التربوية على الحاسوب والمطبوعات المصاحبة لها.
- 21- اكتساب مهارة كتابة وتوثيق برامج ذات بناء جيد وسهولة القراءة.
- 22- التدريب العملي على الاستخدامات المختلفة لجملات الطباعة PRINT.
- 23- التعريف بالثوابت العددية والمتغيرات العددية وقواعد التعبير عنها عند كتابة برامج الحاسوب.
- 24- التعريف ببعض اللغات الجديدة مثل لغة C ولغة باسكال وغيرها من اللغات المستخدمة والمستحدثة في علم الحاسوب.
- 25- فهم كيفية التعامل مع الإنترنت للحصول على المعلومات.

(1-6) الأهداف السلوكية

الجدير بالذكر أن الأهداف التربوية تمثل أهداف وآمال عريضة بعيدة المنال ولكن هناك أهداف سلوكية أو إجرائية يتم تحقيقها داخل حجرة الدراسة، ويهمنا أن نتعرض لها بالدراسة وأن يفهمها كل من الطالب والمعلم لما لها من أهمية في نجاح الخطط التدريسية داخل الفصل.

فالواقع أن كثيرًا من قدامى المدرسين نتيجة لانشغالهم الشديد بالعمل

المدرسي اليومي الذي يستحوذ على قدراتهم وإمكاناتهم وكذلك لاعتقادهم أنهم قادرين على شرح الدروس على أفضل صورة وأن الأهداف التربوية واضحة في أذهانهم وأنه ليس من الضروري أن يقوم المعلم بكتابة أهداف درسه.

ولكن الواقع التدريسي التربوي يفرض على المعلم أن يسأل نفسه مجموعة من الأسئلة من قبيل :

- 1 - ما الذي ينبغي أن تقوم بتدريسه ؟
- 2 - ما هي الأساليب المناسبة لتدريس ما ترغب في تدريسه ؟
- 3 - كيف لنا أن نعرف أننا قمنا بعملية التدريس على أكمل وجه ؟

للإجابة عن هذه الأسئلة نقول أن المعلم مطالب بصياغة أهداف درسه لكي يشعر أنه يعمل في النور ما دام يعرف ما يريد من تلاميذه أن يستطيعوا عمله في نهاية التعلم ويستطيع أن يحدد نوع الأداء المطلوب من تلاميذه.

ما هو الهدف ؟

من الممكن تعريف الهدف بأنه عبارة تصف تغيراً مقترحاً أو مرغوباً نريد أن نحدثه في التلميذ (المتعلمين).

أو هو عبارة تبين ما سيكون عليه التلميذ حين يتم خبرة تعليمية بنجاح.

ما أهمية تحديد الأهداف ؟

إن أهمية تحديد الأهداف تظهر بوضوح في نقطتين أساسيتين هما:

- أ - ما الذي سيكون التلميذ قادراً على أدائه في نهاية الدرس ؟
- ب - معرفة المعلم لمستوى أداء التلميذ وبالتالي الحكم على الناتج التعليمي.

ويمكن ترجمة هاتين النقطتين فيما يلي:

1 - تحديد الأهداف يبعد المعلم عن العشوائية والارتجالية في الدرس

فالمعلم الذي يدخل حجرة الدرس غير محدد لأهدافه التدريسية يجد نفسه مضطراً لسؤال التلاميذ عن النقطة أو الفقرة التي تم التوقف عندها في الدرس

السابق وينتظر إجابات التلاميذ والتي غالبًا ما تكون مختلفة ويبدأ يفكر بماذا يبدأ درسه ؟ وماذا يقدم ؟ وما هي التمارين التي سيقوم بشرحها وحلها ؟ كيف يوزع الأسئلة ؟.

ولكن عندما يكون مخططًا لدرسه محددًا لأهدافه فإنه يكون يقظًا جاهزًا عالمًا بكل ما سيقوم به في الدرس من البداية وحتى النهاية.

2 - تحديد الأهداف يساعد في اختيار طرق التدريس المناسبة

فكل درس من الدروس يحتاج إلى مدخل تدريسي مناسب وكذلك طريقة تدريس مناسبة ومن ثم استراتيجيات تدريسية مناسبة وعندما يجلس المعلم للتحديد والتخطيط لأهداف درسه فإنه يحدد طريقة التدريس المناسبة والمدخل التدريسي المناسب والاستراتيجية المناسبة، أما في حالة عدم التخطيط لدرسه فإنه سيكون مضطرًا لاتباع الطريقة الإلقائية (المتبعة في المدارس).

3 - تحديد الأهداف يساعد في تحديد الوسائل التعليمية

تعتبر الوسائل التعليمية ضمن الخطط المكملة للدرس ونقص هذه الوسائل يقلل من نجاح الدرس، فالمدرس عندما يخطط لأهدافه فإنه يحدد الوسائل التعليمية المناسبة من وسائل مرئية أو مسموعة أو نماذج أو عينات أو أفلام أو شرائح أو تطبيقات منسوخة على ورق هذه الوسائل تعمل على إضافة عنصر التشويق من جهة وتوصيل المعلومة في صورة محسوسة، والمدرس الذي لم يحضر لدرسه لا يمكن أن يجهز هذه الوسائل المطلوبة أثناء الدرس، فكثير من المدرسين يتذكر أنه بحاجة لإحدى هذه الوسائل وهو أمام التلاميذ داخل الفصل فيضطر لإرسال أحد التلاميذ لإحضارها وكم من الوقت الضائع في انتظار أن يحضر هذا التلميذ هذه الوسيلة.

4 - تحديد الأهداف يساعد في تحديد الخبرات التعليمية

فكل معلم يحتاج أن يبدأ درسه بعنصر من عناصر التشويق يمثل مدخلًا تدريسيًا مناسبًا ويساعده في ذلك خبرته كمعلم في هذا المجال، فمعرفة سير

العلماء والصعاب التي واجهتهم وكانت سبباً في اكتشافاتهم وكذلك التقديم لمراحل تطور العلم على مدار السنين ومعرفة الكثير من الألغاز الرياضية تيسر على المعلم تقديم هذه الخبرات للتلاميذ وهذه لا يمكن أن تتحقق إلا عندما يكون المعلم محدداً لأهدافه لكي يختار المناسب لدرسه.

5 - تحديد الأهداف يساعد في اختيار طرق التقويم المناسبة

المعلوم أن الاختبارات التحصيلية (تحريرية أو شفوية) هي علامات وشواهد لمعرفة مدى التقدم في طريق التعليم لدى التلاميذ فهي العين التي يرى بها المعلم مدى نجاح التلاميذ في تطبيق ما تعلموه ومدى تمكنهم ومدى فهمهم واستيعابهم وتطبيقهم لما تعلموه وكذلك تحديداً لمدى نجاح المعلم في تحقيق أهداف درسه.

من هنا فتحديد الأهداف يساعد المعلم في اختيار الأدوات والوسائل التي تصلح للتقويم سواء على نطاق الدرس أو على نطاق الاختبارات الشهرية، والتقويم أيضاً يساعد على تزويد التلاميذ بوسائل تمكنهم من تقييم تقدمهم العلمي وتعطي المعلم تغذية راجعة لما تعلموه.

والجدير بالذكر أن المعلم متى كان محدداً لأهدافه فإن وسائل التقويم التي يستخدمها تكون ناجحة وتؤدي غرضها، أما إذا لم يكن محدداً لأهدافه فإن عملية التقويم تخضع للارتجالية حتى ولو كان ذا خبرة طويلة في مجال التدريس.

معايير اختيار الأهداف السلوكية

هناك بعض المعايير التي ينبغي مراعاتها عند اختيار الأهداف ونقصد بها الأهداف السلوكية أو الإجرائية الخاصة بالخطة التدريسية منها :

1 - التحديد الواضح للهدف السلوكي

يقصد بالسلوك النهائي السلوك المتوقع أن يظهره التلاميذ، فعندما نقول أن الهدف هو أن يتذوق التلميذ الموسيقى الشرقية، فهنا كلمة يتذوق كلمة فيها بعض الغموض إذ كيف يكون التذوق ؟

هل بسماع أشرطة الموسيقى الشرقية ؟

هل بقراءة كتب عن الموسيقى الشرقية ؟

هل بشراء مجموعة من الكاسيتات الخاصة بالموسيقى الشرقية الراقية ؟

هل بحضور الحفلات الخاصة بالموسيقى الشرقية ؟

إذن فالسلوك غير واضح وغير محدد، لكن إذا قلنا أن الهدف أن يستطيع المتسابق قفز خمسة أمتار في سباق الوثب الطويل هنا حدد الهدف تحديداً يكفي لمنع حدوث سوء فهم أو غموض فيه.

وعندما نقول أن الهدف هو أن يحسب التلميذ المتوسط الحسابي لدرجات مجموعة من الطلاب في اختبار ما.

فبالرغم من أن الهدف يحدد فعلاً سلوكاً نهائياً إلا أن هناك نقاط ضعف، فهناك عدة طرق لتعيين المتوسط الحسابي فهناك الطريقة العامة والطريقة باستخدام الوسط الفرضي وكذلك طرق حساب المتوسط عن طريق علاقته بكل من المنوال والانحراف المعياري والوسيط، لذلك فالدقة في تحديد الهدف مطلوبة.

2 - يجب أن يصاغ الهدف السلوكي صياغة ذات دلالة ومعنى

ويقصد بذلك أن أفضل صياغة يستطيع أن ينجح المعلم بها في إيصال المقصد والتعبير للتلاميذ بالصياغة التي تستبعد وجود بدائل واحتمالات ممكنة للهدف.

فهناك عدد كبير من الكلمات القابلة للتأويلات والتفسيرات الكثيرة منها «أن يعرف، أن يفهم، أن يتذوق، أن يستمع، أن يوافق»، وعلى الرغم من أنه لا بأس من استخدام مثل هذه الكلمات في صياغة الأهداف إلا أنه لكي يكون الهدف واضحاً ومحددًا يجب أن يحدد المعنى المقصود بها في العبارة أو يستخدم اللفظ في هدف شامل.

3 - أن تكون الأهداف واقعية ويمكن ترجمتها إلى خبرات منهجية ويمكن قياسها بوسائل قياس مناسبة.

فعندما نقول أن الهدف هو أن يفهم التلميذ أساسيات الرياضيات، فما المقصود بالأساسيات ؟ هل يمكن أن يفهم التلميذ جميع الأساسيات من مفاهيم ومصطلحات وحقائق ومسلمات وتعميمات وتراكيب رياضية، كذلك فإن مجالات الرياضيات كثيرة ومتعددة منها الجبر والهندسة وحساب المثلثات والتوبولوجي والاحتمالات والإحصاء وغيرها.

4 - أن تميز الأهداف السلوكية بين خبرات التعلم التي توصل إلى أنواع السلوك المختلفة.

فالهدف أن يقدم التلميذ على تصليح جهاز الراديو يختلف عن الهدف أن يعرف التلميذ كيف يعمل جهاز الراديو .
وعندما يكتب الهدف «يستطيع التلميذ اشتقاق قانون تفاضل حاصل الضرب والقسمة لدالتين» يختلف عن الهدف «يستطيع التلميذ أن يفاضل حاصل ضرب أو خارج قسمة دالتين» .
لذلك لابد من أن تكون الأهداف السلوكية مميزة لنوع الأداء ولنوع الخبرة المطلوبة.

ولقد أوضح جروتلند⁽¹⁹⁾ قائمة التقدير التالية لتقويم صياغة الأهداف التعليمية :

- 1 - هل يبدأ كل هدف بفعل مناسب ؟
- 2 - هل صيغ الهدف في عبارة تصف أداء التلميذ وليس ما يقوم به المعلم ؟
- 3 - هل صيغ الهدف في صورة ناتج تعليمي ؟
- 4 - هل صيغ الهدف في صورة السلوك النهائي المتوقع من التلميذ وليس في صورة المحتوى الدراسي ؟

والجدير بالذكر أن العديد من علماء التربية المشهورين اهتموا بتصنيف الأهداف السلوكية ومنهم بنيامين بلوم ودافيد كراثول وزايس وهيلدا تابا حيث قاموا بتصنيفات هرمية للأهداف مشتقة من المجالات المعرفية والوجدانية والنفس حركية، ولقد عرّف بلوم وزملاءه (1956) أهداف مجالات التعلم المعرفية كالتالي :

يتضمن المجال المعرفي تلك الأهداف التي تتعامل مع استرجاع وإدراك المعلومات ونمو القدرات العقلية والمهارات ويتضمن المجال الوجداني أهدافاً تصف التغير في الاهتمامات والاتجاهات والقيم ونمو أوجه التقدير والتوافق الكافي.

ويرى بعض التربويين أن الخبرة التعليمية لها جوانب خمسة يقسمون الأهداف على أساسها إلى أهداف تتعلق بـ :

- 1 - المعرفة
- 2 - المهارات
- 3 - التفكير
- 4 - الميول والاهتمامات
- 5 - القيم والاتجاهات

ويمكن تقسيمها إلى ثلاثة مجالات فقط :

- 1 - أهداف معرفية وتشمل (معرفة - تفكير - استدلال منطقي).
- 2 - أهداف وجدانية وتشمل (عواطف - مشاعر - ميول - اتجاهات).
- 3 - أهداف مهارية وتشمل (مهارات يدوية - مهارات حركية).

(1-6) تصنيف الأهداف

من التصنيفات الجديرة بالاهتمام للأهداف السلوكية والإجرائية والخاصة بالخطوة الدراسية ما نشره بنيامين بلوم وزملاءه عام 1956 والخاص بالمجال المعرفي والغرض من هذا التصنيف هو وضع بنود للتغيرات المعرفية التي يكتسبها التلاميذ كنتيجة للأهداف وطرق النظام التربوي والتغيرات التي تنتج من حل المشكلات والاختبارات والملاحظات المتضمنة في أسس تصنيف بلوم والناجمة عن التغيرات العقلية القابلة للملاحظة والقياس، ويمكن أن يستخدم

المعلمون أسس التصنيف كعامل مساعد في صياغة الأهداف التعليمية واختيار طرق التدريس وتصميم الاختبارات والأنشطة لتحديد تعلم التلاميذ.

أولاً : الأهداف المعرفية

صنف بلوم الأهداف التربوية التعليمية في المجال المعرفي إلى ستة مستويات متدرجة من الأبسط إلى الأكثر تعقيداً وتسمى مستويات بلوم الستة

- | | |
|----------------------|-------------|
| وهي : | 3 - التطبيق |
| 1 - المعرفة (التذكر) | 2 - الفهم |
| 4 - التحليل | 5 - التركيب |
| | 6 - التقويم |

وسنوضح هذه المستويات بالتفصيل :

1 - المعرفة Knowledge

في هذا المستوى تؤكد الأهداف على العمليات العقلية الخاصة بالتذكر واسترجاع الحقائق والمعلومات والمصطلحات وتكون بنفس الصورة التي عرضت بها أثناء عملية التدريس.

ففي الرياضيات يتوقع من التلاميذ تذكر الرموز المستخدمة في العمليات مثل الجمع والضرب والطرح والقسمة والاتحاد والتقاطع بين فئتين وتذكر جدول ضرب ومنطوق النظريات والحقائق والقوانين وتذكر خواص الزمرة والحقل ويستخدم في صياغة أهداف هذا المستوى أفعال مثل : يذكر، يعرف، يسمى - يتو - يكتب - يحدد - يصف - يختار - يعدد (1).

2 - الفهم Comprehension

يستطيع المتعلم في هذا المستوى أن يعبر عما درسه من أفكار تعبر يختلف عما أعطى له، فمتى فهم التلميذ الفكرة واستطاع التعبير عنها والاستفادة منها دون أن يكون من الضروري قد فهم كل تطبيقاتها فيمكن أن يترجم أو يصيغ الفكرة بلغته الخاصة أو يفسر فقرة ما أو يقوم بالاستنتاج أو التنبؤ من بيانات معروضة في جدول أو التنبؤ بعواقب أحداث معينة.

وتستخدم في صياغة أهداف هذا المستوى أفعال مثل :
يصنف - يناقش - يوضح - يعيد ترتيب - يستتبط - يستنتج - يلخص - يميز .
فمثلاً يمكن أن يعيد التلميذ ترجمة نظرية فيثاغورث باستخدام الرموز،
فإذا كانت أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية هي ل، م، ن ،
ن طول الوتر فإن « $ل^2 + م^2 = ن^2$ »
أو إذا علم التلميذ قيمة جيب الزاوية 30° فإنه يستطيع أن يحسب جيب تمام
الزاوية المتممة لها وهي 60°.

3 - التطبيق Application

في هذا المستوى يكون التلميذ قادراً على استخدام وتطبيق ما تعلمه من
معلومات وقوانين وتطبيقات ونظريات في مواقف جديدة تختلف عن تلك التي تم
تناولها أثناء الدراسة أي استخدام أفكار جديدة في مواقف معينة وملموسة دون
تلقيين ويشمل هذا المستوى استخدام المجردات في مواقف محددة وملموسة مثل
المبادئ والنظريات والقوانين، فايجاد المعكوس (النظير) الضربي لمصفوفة لم
يسبق للطالب أن أوجد المعكوس الضربي لها من قبل الطالب أو المعلم كما أن
حل مجموعة من المعادلات من الدرجة الأولى في ثلاثة مجاهيل باستخدام
المحددات.

والأفعال المستخدمة في هذا المستوى مثل يطبق، يستخدم، يعلل، يجري، يحل
مسألة، يضيف، يوضح، يكتشف.

4 - التحليل Analysis

في هذا المستوى تظهر قدرة المتعلم على تجزئة الموضوع إلى مكوناته
الأساسية أو أجزاؤه بحيث يتضح التدرج الهرمي للأفكار الرئيسية من جهة
والعلاقات بينها من جهة أخرى.

والتحليل كمستوى يمكن أن نجده في تحليل العناصر أو تحليل العلاقات
أو تحليل تنظيمات المبادئ وتتطلب عملية التحليل مستوى عال من الفهم عند

القيام بعملية التحليل فمثلاً عندما يوضح التلميذ أن العدد 2112 للأساس 3 يساوي 68 للأساس 10 يتطلب ذلك منه إيجاد حالة مشتركة بين الحالتين كان يحول كل من العددين إلى النظام الثنائي ومن ثم المقارنة بين العددين، أو يحول العدد 2112 إلى الصورة للأساس 10.

والأفعال المستخدمة في هذا المستوى : يبرهن على صحة، يقارن، يميز، العوامل الأساسية في قضية، يرتب، يجزئ.

5 - التركيب Synthesis

في هذا المستوى يتم تجميع العناصر والأجزاء لتكوين كل متماسك ومتكامل، ويكون بناء وتركيب هذه العناصر بطريقة تؤدي إلى تكوين نمط أو تركيب غير موجود أصلاً.

فعندما يعطى الطالب مجموعة (فئة) من الأعداد الحقيقية معرف عليها عمليتان مثل الجمع والضرب ويقوم الطالب بالبرهنة على تحقق خواص مثل الإنغلاق والتجميع والمعكوس الجمعي والمعكوس الضربي والمحايد الجمعي والمحايد الضربي وكذلك خاصية توزيع عملية الضرب على عملية الجمع مع خاصية الإبدال لكل من عمليتي الجمع والضرب في هذه الحالة يكون الطالب قد توصل إلى تركيب يسمى الحقل Field .

وعموماً فإن هذا المستوى يتطلب تحليلاً لمركبات المهمة التي سوف يتم تركيبها، والأفعال المستخدمة في هذا المستوى من قبيل يصمم تجربة - يخطط - يقترح أسلوباً - يجمع بين - يعيد ترتيب أو بناء.

6 - التقويم Evaluation

ويقصد في هذا المستوى الحكم الكمي والكيفي على موضوع أو طريقة أو أسلوب في ضوء معايير داخلية كالصدق المنطقي والاتساق وعدم وجود تعارض أو في ضوء معايير خارجية مثل عدم معارضة قيم وتقاليد المجتمع أو الارتفاع بأذواق الجماهير⁽¹⁾.

ويعتبر التقويم أعلى مستويات الأهداف لأنه يتضمن استخدام المعلومات والفهم والتطبيق والتحليل والتركيب وقد يقود التقويم إلى اكتساب معلومات ومعارف جديدة، فعند الحكم على صحة برهان رياضي من حيث الدقة ومناسبة المسلمات المستخدمة وكذلك الخطوات المنطقية للأسلوب الاستنباطي المتبع في البرهان، كما أن الحكم على نظريات رياضية أو أنظمة وتراكيب رياضية يكون من خلال إسهاماتها في تحقيق تقدم في الرياضيات، كل ذلك يتم من خلال محكات رياضية خارجية متفق عليها.

فعندما يُقيم الطلاب مزايا حل أنظمة من المعادلات الخطية في عدة مجاهيل بطريقة التعويض أو بطريقة الاختصار أو بقاعدة كرامر أو بالطريقة العددية يتم ذلك بالاستعانة بمحكات خارجية من قبيل أي الطرق أسهل في التطبيق وأي الطرق أقصر في عدد الخطوات المتبعة للوصول إلى الحل وغير ذلك.

والأفعال المستخدمة في هذا المستوى من قبيل إصدار حكمًا على، ينقد، يناقش بالحجة أو الدليل، يقدر قيمة، يدعم بالحجة، يقوم.

فتقييم التلاميذ لمزايا البرهان المباشر والبرهان غير المباشر ومجالات استخدام كل منهما يمثل مستوى التركيب أيضًا.

ثانيًا : المجال الوجداني (العاطفي) Affective Domain

هذا المجال يركز على الأهداف التي تتعلق بالجوانب الوجدانية أو الانفعالية للطلاب حيث تنمية أشياء مثل الاهتمامات أو الميول Interests والاتجاهات Attitudes والتقدير Appreciation والقيم Values والالتزام Commitment وقوة الإرادة.

ولقد صنف «كراثهول» وزملاءه السلوك العاطفي (الوجداني) إلى خمس مستويات تتدرج من البسيط إلى المركب وتعتبر عملية الوعي Awareness أول خطوة لاستثارة السلوك العاطفي وتعتبر جوهر السلوك ثم تأتي الخطوة الثانية

بالاستعداد للاستقبال وكذلك الاستعداد للانتباه ومن ثم الاستجابة إلى الاعتزاز بقيم إلى بناء تنظيم قيمي والاتصاف بنظام قيمي وهذه المستويات (الخطوات) الخمس لتصنيف كراثيول هي:

1 - الاستقبال Receiving

وهذا المستوى ينقسم إلى ثلاثة مستويات فرعية تبدأ بـ :

أ - مستوى الوعي حيث يصبح الفرد في هذا المستوى قد أوشك على الانجذاب نحو المثيرات.

ب - مستوى الاستعداد للاستقبال حيث يكون الفرد قد نجح في التمييز بين المثيرات واختلاف بعضها عن الآخر ويكون مستعدا للانتباه والانجذاب نحوها.

ج - مستوى الاختيار والانتقاء للانتباه حيث يصبح الفرد مشدودا إلى المثيرات ومتيقظا لها.

ومن الأفعال المستخدمة في مستوى الاستقبال نجد يلتفت إلى، يصغي إلى، يحس بـ، يستمع إلى، موافق على،...

2 - الاستجابة Responding

ويقصد بهذا المستوى الرضا أو القبول أي يصبح المتعلم راغبا في شيء أو موضوع أو نشاط يسعى إليه ويشعر بالرضا في المشاركة فيه، وقد ينفر المتعلم من ذاك الشيء أو الموضوع، ويقسم هذا المستوى إلى ثلاثة مستويات فرعية تبدأ بـ :

أ - الإذعان أو قبول الاستجابة Acquiescence in Responding

حيث يكون الفرد مجرد مستجيبا لتوقعات معينة مثل الإذعان لإشارات وقواعد المرور أو مواعيد الدخول إلى المدرسة والانصراف منها أو يكون مستجيبا لضغوط داخلية ناتجة عن ميوله الشخصية.

ب - الاستعداد للاستجابة Willingness to Respond

حيث يصبح الشخص لديه الاستعداد أو الرغبة في المشاركة في هذا النشاط (أرغب في المشاركة في النادي العلمي بالمدرسة).

ج - الرضا في الاستجابة Satisfaction in Responding

حيث يستجيب الفرد عاطفيًا لأنواع من النشاط المختلفة (الرسم بالكمبيوتر، عمل نماذج أو مجسمات لأشياء يحبها الشخص).

والأفعال المستخدمة في مستوى الاستجابة من قبيل يقبل على، يبدي إعجابه بـ، يميل إلى، يتحمس لـ، يعبر عن تذوقه لـ، يعبر عن استمتاعه بـ، ينفر من، يتطوع لـ....

3 - التقييم (الاعتزاز بقيمة) Valuing

في هذا المستوى يرى الفرد أن الموضوع أو الظاهرة أو السلوك المرغوب فيه يكون له قيمة لديه، وفي الواقع فإن هذا التقدير هو نتاج اجتماعي بدأ الفرد يتقبله ويستحسنه تدريجيًا حتى أصبح جزءًا منه واستخدمه كما لو كان نابعًا منه ويصبح من الثبات والاستقرار بحيث يصل إلى مستوى الاتجاه أو المعتقد ويصبح السلوك تجاه هذا الموضوع ثابتًا ومحددًا ويصبح الفرد مدفوعًا للشيء بدافع ارتباطه بهذه القيمة التي توجه سلوكه ويبدأ بالاعتزاز بالقيمة التي توجد وراء هذا السلوك تجاه هذا الموضوع أو الشيء ومن ثم الالتزام بهذه القيمة كجزء من ضمير الفرد ويبدأ الفرد في العمل على إقناع الآخرين بهذه القيمة.

ويمكن تقسيم هذا المستوى إلى ثلاثة مستويات فرعية هي :

أ - قبول القيمة Acceptance of value

ويمثل هذا المستوى رغبة متزايدة في نماء قدرة معينة بكفاءة وحرص مثل نماء قدرة التعامل مع الحاسوب في الطباعة بكفاءة.

ب - تفضيل القيمة Preference for a value

في هذا المستوى نجد النشاط يصبح مرغوبًا ومساندًا لدى الفرد.

ج - الالتزام بالقيمة Commitment

حيث يصبح الفرد معتقدا بهذه القيمة وأهميتها كمن يعتقد بالطريقة التجريبية أو الاستقصاء العلمي أو العلاج بالأعشاب. ومن أفعال مستوى التقييم يبدي رغبة مستمرة في، ينمو شعوره نحو، يكون اتجاهها نحو، يحترم، يسهم بنشاط، يتحمل مسؤولية.

4 - التنظيم Organization

مع نمو الفرد ومن خلال خبراته وتفاعلاته الحياتية يكتسب الفرد قيما متعددة (التي اكتسبها في المستوى الثالث) وعندما يصل إلى درجة من النضج فإنه يبدأ في بناء نظام قيمي لهذه القيم بحيث يحدد سلوك الفرد وعلاقاته. وهذا الكيان القيمي للفرد ليس ثابتا بل يمكن أن يتعدل لدى الفرد بتعدل بعض القيم نتيجة للتغيرات في المجتمع وعمليات التكيف فيه. إن الفرد يظل يستدخل قيما باستمرار ويعدل من بعضها وحيث أنه يقابل أحيانا مواقف ترتبط بأكثر من قيمة واحدة فذلك يتطلب منه تنظيم القيم وتضمينها في جهاز تنظيمي قيمي خاص به وهذا الجهاز (المستوى) ينقسم إلى مستويين فرعيين هما :

أ - إدراك القيمة Conceptualization of value

حيث تتم الرغبة في عمل شيء قيمي مثل الرغبة في عمل ندوة لجمع التبرعات للأسر الفقيرة أو المساهمة في التثقيف الصحي في الحي. ب - تنظيم الجهاز القيمي وجعل التخصص قيمة مساندة له، مثل العمل من خلال هذا الجهاز المنظم لدى الفرد على تعميم بعض هذه القيم لدى الغير.

ومن الأفعال المستخدمة في مستوى التنظيم نجد: يؤمن بـ ، يعتقد في، يضحى في سبيل، يضع خطة لتنظيم...

5 - التوصيف بقيمة Characterization by a value

عندما يتم بناء مجموعة من القيم لدى الفرد يقوم الفرد ذاتيًا بترتيب هذه القيم هرميًا بحيث يتصف هذا النظام بالتوافق والاتساق الداخلي ويتحكم في سلوك الفرد عندما يقابل مواقف ترتبط بقيمه المستدخلة لديه، ويوصف هذا السلوك بالتوصيف عن طريق القيمة أو عن طريق قيمة مركبة، وفي هذا المستوى يتم التوصل إلى قمة النظرية الخاصة بالقيم عن طريق عملية التنبؤ الذاتي بحيث توصله إلى نظرة وفلسفة عن الكون والحياة.

كذلك في هذا المستوى يتم تكوين نظامًا سلوكيًا مبنياً على مبادئ أخلاقية تقوم على قيم معينة (الدين، التضحية في سبيل الوطن، خدمة الإنسانية) أو العكس، أو يكون لدى الفرد الاستعداد لمراجعة الأحكام وتغيير السلوك في ضوء الشواهد الموجودة.

وعموماً فعلية التوصيف Characterization نجدها في تنمية فلسفة ثابتة غير متناقضة في الحياة.

ولنأخذ أمثلة على المسار الوجداني (العاطفي) :

مثال (1)

في الميول Interests لدى الأشخاص نجدها تبدأ بـ :

- | | | |
|-----------|---|--------------------------------|
| استقبال | { | 1 - الشعور بالوعي |
| | | 2 - الاستعداد للتقبل |
| | | 3 - الانتباه المحكم أو المختار |
| الاستجابة | { | 4 - الإذعان أو قبول الاستجابة |
| | | 5 - الاستعداد للاستجابة |
| | | 6 - الرضا في الاستجابة |
| تقييم | { | 7 - قبول القيمة |
| | | 8 - تفضيل القيمة |

أمر سلوك التغير ينقسم مصدر الاستعداد والاستجابة والتكيف.

مثال (2)

مصدر التكيف Appreciation

- | | | | |
|-----|--------------------------|---|-----------|
| 1 - | أثناء التحرك أو المختار | ← | السلوك |
| 2 - | الإنسان أو قول الاستجابة | { | الاستجابة |
| 3 - | الاستعداد للاستجابة | | |
| 4 - | الرضا في الاستجابة | | |
| 5 - | قبول القيمة | | |
| 6 - | تفضيل القيمة | { | التكيف |

إن سلوك التكيف يمر بالمراحل السلوك والاستجابة والتكيف.

مثال (3)

مصدر التوافق Adjustment نجد المصدر لهذا السلوك يبدأ في :

- | | | | |
|---|-----|---------------------------|--------------|
| { | 1 - | الاستعداد للاستجابة | الاستجابة |
| | 2 - | الرضا في الاستجابة | |
| { | 3 - | قبول القيمة | التكيف |
| | 4 - | تفضيل القيمة | |
| | 5 - | الاستعداد | |
| { | 6 - | الإثبات بالقيمة | التضيق |
| | 7 - | تضيق الجوار (تضاد) القيمي | |
| { | 8 - | الوضع المعتمد | توصيف القيمة |
| | 9 - | توصيف | |

ويشير التكيف إلى أكبر أنواع السلوك المعقد الموصوف في المستويات

العلوية، بينما يشير التمييز والتقدير إلى معنى متضمن في السلوك المميز في

المستويات الدنيا.

ثالثاً: المجال النفسي حركي (المهاري) Psycho Motor Domain

ترتبط أهداف هذا المجال بالجانب المهاري أو المهارات السيكوحركية خاصة فيما يتصل بالجوانب الجسمية الحركية والأداءات المختلفة بين أعضاء مختلفة من الجسم، وينقسم هذا الميدان إلى ستة أقسام رئيسة :

1 - الأفعال أو الحركات المنعكسة

وتظهر هذه في انعكاسات قطعية Segmental Reflexes أو الانعكاسات القابضة أو انعكاسات حذقية وانعكاسات بين قطعية وقابضة وانعكاسات متنافسة وانعكاسات متعاقبة وانعكاسات متعاونة وصور منعكسة أو ردود أفعال ناقلة أو انعكاسات اتجاهية أو ردود أفعال قفزية ووضعية، ونلاحظ أن جميع هذه المفاهيم نجدها في الحركات الرياضية والأفعال السلوكية المرتبطة بهذه الأنواع من الحركات مثل: ينثني، يمتد، يظهر، يطول، يستطيل، يستريح.

2 - الحركات الأساسية

وتظهر في حركات ناقلة أو غير ناقلة وحركات مثل القبض (المسك) والبراعة، والأفعال السلوكية المرتبطة بذاك النوع من الأهداف من قبيل يزحف، يتزحلق، يقفز، يمسك، يرمي، يمشي.

3 - القدرات الإدراكية Perceptual Abilities

وتظهر في التمييز الحركي مثل التوازن، علاقة الجسم بالأشياء المحيطة، التمييز البصري، الذاكرة البصرية، والأفعال السلوكية المرتبطة بهذا النوع من القدرات تتمثل في ينظر، يأكل، يكتب، يستخرج من الذاكرة، يفرق عن طريق اللمس.

4 - القدرات الجسمية

وتشمل هذه القدرات التحمل Endurance مثل تحمل عضلي (كحمل الانتقال) أو تحمل الجهاز الدوري وكذلك من القدرات الجسمية المرونة والرشاقة Agility وتغيير الاتجاه (في حالة اللعب «جيمباز» على الحصان).

وتُظهر أفعال هذا السلوك في يتحمل نشاطًا مجهودًا، يطور، يتحرك بسرعة، يلمس أصابع القدم، يتحرك بميل، يمشي على يديه.

5 - حركات مهارية

مثل القيام بمهارة توليفية بسيطة أو مهارات متوسطة أو مهارات عالية مثل هذه المهارات تتطلب الكرة أو مهارات توافقية حركية (متوسطة وعالية) مثل هذه المهارات تتطلب الكرة بالرأس لعشرات المرات، توصيل مجموعة لمبات كهربائية على التوالي أو التوازي، استخدام بعض أدوات النجارة بمهارة عالية.

6 - اتصال غير تنابعي Non Discursive Communication

مثل الحركات التعبيرية كالإيماءات أو تعبيرات الوجه لدى الممثلين على المسرح وكذلك التمييز بين الشكل والأرضية في اللوحات الفنية والتمييز السمعي وكذلك نجدها في الحركات الجمالية والحركات الابتكارية. ومن الأفعال المستخدمة في مثل هذا الهدف يومئ، يجلس، يعبر بالوجه، يرقص بمهارة، يرسم بمهارة، يخطط بدقة، يعبر عن الانبساط عن طريق الوجه والحركات.

ومن التصنيفات المشهورة في هذا المجال نجد⁽¹⁾:

1 - تصنيف زايس "Zais" ويتضمن :

أ - ملاحظة أداء شخص ماهر.

ب - تقليد العناصر الأساسية للمهارة.

ج - التمرين ويتضمن تكرار تتابع عناصر المهارة مع تقليل الجهد الواعي للأداء تدريجيًا.

د - إتقان المهارة مع احتمال زيادة هذا الإتقان.

2 - تصنيف ديف Dave

هذا التصنيف يجمع بين الأفعال النفسية والعقلية وبين الأفعال العضلية

المختلفة التي تقوم بين الأجزاء المختلفة في الجسم وتتمثل في :

أ - التقليد Imitation

ويشمل النشاطات التي لا تتطلب تناسقاً بين العضلات.

ب - التناول Manipulation

وتشمل النشاطات التي تتعلق باتباع توجيهات أو العمل وفق تعليمات.

ج - التدقيق Precision

ويشمل القدرة على زيادة سرعة العمل والقدرة على إدخال تعديلات فيه تتطلبها الظروف الخاصة بموقف معين.

د - التنسيق Association

يشمل القدرة على التنسيق بين سلسلة من الحركات بالتوصل إلى تتابع مناسب وزيادة الكفاءة في أداء عدد من الحركات المترابطة.

هـ - التطبيع Naturalization

جعل العقل آليةً روتينياً لدرجة أن تصبح استجابته آليةً أوتوماتيكية.

علاقة الميادين المعرفي بكل من الميادين العاطفي والسيكوحركي

هناك الكثير من البحوث والدراسات التي أوضحت العلاقة بين الميادين الثلاثة (المعرفية، العاطفية، السيكوحركية)، فنجد سكر "Skinner" يوضح «أن السلوك قد يدرك من خلال منظومة من الاستثارات المعرفية والعاطفية التي لا يمكن الفصل بينها فصلاً حقيقياً كما أنه لا يمكن تجزئ السلوك بحيث يوجد تكامل بين الإثارة المعرفية والعاطفية بين قسم وآخر» (76).

وأشار روكيش "Rokeach" بأن تحليل السلوك المعرفي يتضمن جانبًا عاطفيًا أيضًا فتحليل المعتقدات ونظمها لا تلزم الفرد بدراسة السلوك المعرفي فقط بل أيضًا تحليل المشاعر العاطفية التي تشكل تلك المعتقدات وعلاقتها البنائية في النظام⁽⁷⁵⁾.

أما كراثهول "Kratwohl" فيشير إلى اكتساب الأهداف العاطفية عن طريق الوسائل المعرفية⁽⁷⁹⁾.

كذلك يمكن الانتقال من الميدان المعرفي إلى الميدان العاطفي، ففي الاتجاهات حيث نجد المكون المعرفي عن الشيء أو الموضوع يقود إلى المكون العاطفي من حيث الحب أو الكره ومن ثم المكون السلوكي.

ويضيف «روكيش» أنه إذا تم النجاح في التوصل إلى أن أي عاطفة لها مناظرها المعرفي نستطيع الوصول إلى أعماق الحياة العاطفية المعقدة للشخص من خلال دراسة عملياته المعرفية.

ويرى برونر "Bruner" أن قدرة حل المشكلة والاستكشاف في التعلم تعطي حوافز متزايدة نحو تنمية الميول والاتجاهات المناسبة ولا تنحصر وجهة النظر هذه في كمية ما يتعلمه الفرد فقط ولكن الاهتمام يكون موجهًا إلى الطريقة التي يتم بها التعلم وهذه الطريقة تقرر الأهداف العاطفية التي سيتم تحقيقها في نفس الوقت الذي تتحقق فيه الأهداف المعرفية⁽⁵⁸⁾.

ويعتقد كثير من التربويين أن حفز التلميذ على التعلم وزيادة دافعيته نحو التعلم (تحقيق الأهداف العاطفية المرغوبة في التدريس) فإن تعلم المادة الدراسية (أهداف معرفية) يأخذ مكانه بمعدل أسرع وعلى مستوى أعلى من الكمال⁽³⁷⁾.

وإذا ما عدنا إلى المجال النفس حركي حيث نجد الحركات العاكسة والحركات الأساسية والقدرات الإدراكية والقدرات الجسمية والحركات المهارية والاتصال غير المتابعي نجد كلها ترتبط ارتباطًا وثيقًا بالجانب المعرفي فبدون

عمليات الوعي والانتباه وعمليات التذكر للمهارة والتطبيق لا يمكن أن تتحقق أهداف الجانب المهاري.

إذن هناك ارتباط بين المجالات الثلاث (المعرفية، العاطفية، المهارية) ولا يمكن الفصل بينهم لذلك لابد من التركيز على هذه الجوانب الثلاث.

الفصل الثاني

طبيعة وفلسفة الرياضيات

Nature and Philosophy of Mathematic

- (1-2) مقدمة
- (2-2) طبيعة الرياضيات
- (3-2) فلسفة الرياضيات
- (4-2) اتجاهات حديثة في تدريس الرياضيات
- (5-2) طريقة التدريس
- (6-2) مميزات طرائق التدريس المطلوبة
- (7-2) بعض التطورات الحديثة في الرياضيات

الفصل الثاني طبيعة وفلسفة الرياضيات

(1-2) مقدمة

يتميز العصر الذي نعيش فيه بالتكنولوجيا والتقدم العلمي الهائل والانفجار المعرفي على أن أهم سمة لهذا العصر هي دور الرياضيات في الاكتشافات الحديثة والنظريات العلمية التي أدت إلى اكتشاف الذرة وغزو الفضاء باستخدام الصواريخ عابرة القارات والأقمار الصناعية وسفن الفضاء.

من هنا تهتم الدول بإعداد أجيالها إعدادًا جيدًا في مجال الرياضيات إلى الدرجة التي أصبح فيها تقدم الأمم ورفقها يقاس بعدد ما لديها من علماء في الرياضيات وهذا ما حدا أحد رؤساء أمريكا إلى اعتبار أن الرياضيات هي خط الدفاع الثاني للدولة.

لذلك نجد «اهتمام الدول بتطوير وتحديث مناهج الرياضيات خاصة بما يتماشى مع قدرات الطلاب واستعدادهم الدراسي من جهة وبما يتطلبه هذا العصر من وجود كوادر من المتعلمين يتميزون بقدرات عقلية مميزة مثل القدرة على التفكير الناقد والابتكارية أو الإبداع والذين يستطيعون أن يفهموا ويمارسوا لعبة الرياضيات بإتقان ومهارة وفن وينقلوا هذه اللعبة إلى الواقع الحياتي في شتى الميادين»⁽²⁷⁾.

من هنا لابد لدارس الرياضيات في أي مستوى عمري من خلال السلم التعليمي (ابتدائي - إعدادي - ثانوي - جامعي) أن يفهم طبيعة وفلسفة هذه المادة أو هذا العلم حسب قدراته وإمكاناته وذلك من خلال أو عن طريق معلميه بالدرجة الأولى.

(2-2) طبيعة الرياضيات

تعتبر الرياضيات من أقدم العلوم التي عرفها الإنسان واستخدمها في حياته اليومية بصورة مباشرة خاصة عندما احتاج إلى المقاييس والعمليات في معاملاته وتشاطاته، وكأي شيء يبدأ بسيطاً ثم يتطور بمرور الزمن فكانت تتوسع كالصواب والجبر والهندسة وحساب المثلثات والتربولوجي والإحصاء لتتوسع كالاحتمالات وغيرها... ولقد تميزت الرياضيات عن سائر العلوم بطبيعة وفلسفة مختلفتين، فقد أن طبيعة الرياضيات تتميز بالآتي :

أولاً : أن أحد الأسباب التي أدت إلى وضع الرياضيات في العالم أجمع كجزء إجباري في المنهج هو أن الرياضيات تكرب العقل وتمدنا بأفضل تدريب في مجالات التفكير التحليلي والتركيبى وكذلك في استخدام الطرق المنطقية وعمليات التصنيف والاستنتاج والاستيعاب، ولعل عبارة (الرياضيات ملكة العلوم) ناتجة عن وضوح طريقها وصحة منطقتها وتطبيقاتها وكذلك لا يوجد أي مشكلات في الأسس المنطقية المبنية عليها بالرغم من تغيرها المستمر سواء في محتواها أو طريقتيها⁽¹⁴⁾ كطريقة التفكير الرياضي والتي تقوم بالحصول على معرفة جيدة تصحح إدراكنا الحسي والذي يخضع دائماً للخداع.

ولعل أهم أنواع التفكير العقلي المنطق الاستقرائي والتأطري والاستنتاجي، لكن التفكير الاستنتاجي هو ما يدلنا على صحة النتيجة ونوضح ذلك: فالتفاح أحمر لوجود آلاف من التفاح الأحمر هو منطق استقرائي وهذا لا يمكن الاعتماد عليه لأنه لو وجدت تفاحة صفراء بين آلاف التفاحات لثبت خطأ الاستقراء.

أما التفكير التأطري فيوضح عندما نقول أن أحمد تلميذ ممتاز في اللغات وعلى ذلك فإن توالفه الذي يرث نفس الصفات ممتاز في اللغات وهذا غير صحيح.

وعندما نقول أن الأشكال الرباعية لها أربعة أضلاع والمستطيل شكل له

أربعة أضلاع، فالاستنتاج أن المستطيل شكل رباعي فهذا المنطق الاستنتاجي والذي يقوم على القياس وعدم التناقض بمعنى أن الافتراض لا يمكن أن يكون صحيحًا وخاطئًا في نفس الوقت إضافة إلى قانون الثالث المرفوع بمعنى أن الافتراض يكون صحيحًا أو خاطئًا لا ثالث لهما (حذف الوسط).

والرياضيات مثل سائر العلوم أسلوب ونتاج ومنذ أكثر من ثلاثة آلاف عام بنى المفكرون والرياضيون العظام في الهند والصين واليابان واليونان ومصر وشبه الجزيرة العربية وأوروبا الحديثة وأمريكا صرح الرياضيات العظيم، ويضاف إلى هذا الصرح كل عام حوالي مائة ألف صفحة من الرياضيات الحديثة الخلاقة والتي تتضاعف على مدى عشر سنوات، إن هذا العالم من الرياضيات الذي صنع بيد الإنسان يعد عالمًا واسعًا ومتشعبًا إلا أن الرياضيات بطبيعتها كأسلوب أهم بكثير من كونها نتاج، فبينما النتاج أساسي في الحضارة الحديثة إلا أن الأسلوب لا يمكن الاستغناء عنه للاستمرار في التطور والنمو والتي هي سمات هذا العصر الحديث.

ثانيًا : إن مناهج الرياضيات تستهلك منا وقتًا طويلًا لتقديم المعرفة الرياضية كنتاج للتلاميذ، ولكن يجب أن نقضي بعض الوقت في إعطاء المعرفة للتلاميذ كأسلوب أي أسلوب التفكير الرياضي وأنماطه والذي سيقود التلاميذ إلى ثقافة رياضية شبيهة بالثقافة العلمية والثقافة الإنسانية، هذا الأسلوب أصبح هدفًا من أهداف التربية في الوقت الحاضر.

ثالثًا : تظهر طبيعة الرياضيات في أن غالبية التلاميذ لا يتمتعون عادةً بنظرة شاملة للرياضيات، فالرياضيات بحر عميق وحتى المتخصصون فيها لا يرون إلا جزءًا صغيرًا من الرياضيات نظرًا لتخصصهم الدقيق، لذلك لا يستطيع أحد أن يتعلم الرياضيات بأكملها، وبالرغم من ذلك فالرياضيات نفسها قد مهدت الطريق لإنجازات علمية عظيمة.

فمثلًا : أينشتاين في نظريته النسبية العامة وهي فرع من فروع الفيزياء أدت إلى

اكتشاف الطاقة النووية وتحطيم الذرة وبذلك قاد العالم إلى تقدم عظيم في تاريخ البشرية ولم يكن لأينشتاين أن يصل لذلك أو يكمل أفكاره بدون تطبيق حساب التفاضل والتكامل والهندسة الإقليدية ذات الفراغ الرباعي الأبعاد باعتبار الزمن بعداً رابعاً كما شرحها لوباتشفسكي ومنكاوسكي.

رابعاً : تتميز طبيعة الرياضيات بالتجريد وهذا هو سر قوتها حيث أنها تتضمن وبمفهوم واحد مجرد الصفات الحيوية لكل المظاهر الفيزيائية لذلك المفهوم، وعليه نجد أن الخط المستقيم في الرياضيات يتضمن الخط المشدود وحافة المسطرة وطريق الشعاع الضوئي، وهذه المفاهيم المجردة يمكن تمثيلها بالأرقام وأن الفشل في إدراك هذا يمكن أن يؤدي إلى الاضطراب، ولتوضيح ذلك لنفرض أن شخصاً ذهب إلى محل ألعاب للأطفال واشترى دراجتين لطفليه فإذا كان سعر الدراجة الواحدة 50 ديناراً فعندما يطلب البائع مائة ديناراً ثمناً للدراجتين فالرقم مائة هنا يفهم من البائع والمشتري أنه يمثل دنانير أي أن دراجتين مضروباً في دنانير ينتج دنانير ولا ينتج دراجات لماذا؟... لأننا في الواقع لا نضرب دراجات في دنانير ولكننا نجرد الرقم اثنين والرقم خمسين من معنهما الفيزيائي نضربهما لنحصل على المائة ثم نربط الناتج بالمعنى الفيزيائي.

ومثال آخر :

إن الرياضيات تعتمد على التجريد أكثر منها على التطبيق العلمي هو أن الاتجاه بسفن الفضاء التي تحط على القمر والكواكب الأخرى لم يعد لها في المعمل وإنما خطت وحسبت حساباتها على أسس تقديرية مجردة ثم جاءت بعد ذلك عملية النمذجة والتطبيق العملي.

ومثال ثالث :

إن علاقة أينشتاين في النظرية النسبية اكتشفت كعلاقة رياضية مجردة وظلت بعيدة عن التطبيق حوالي عشرين عاماً حتى توصل العلماء إلى توفير

الشروط اللازمة لتطبيقها عملياً والتي قادت إلى تحطيم الذرة في مجال الفيزياء.

إن فالرياضيات مفيدة في الفيزياء والبيولوجي والعلوم الاجتماعية والاقتصاد والإدارة حيث تستخدم هذه العلوم الأساليب الرياضية وكذلك الرموز الخاصة بالرياضيات والمعلومات الرياضية الأولية؛ على أن الإسهام الأكبر التي حصلت عليه هذه العلوم هو طريقة التفكير والذي هو من طبيعة الرياضيات.

خامساً : إن طبيعة الرياضيات تتجلى في كونها لغة أو عائلة من اللغات المرتبطة بعضها ببعض بحيث أن عدداً منها لا يمكن أن يفهما جميع الاختصاصيين في الرياضيات، فمثلاً التوبولوجي لغة رياضية حيث ارتباط الأشياء بالأمكان أو الصفات أو الأشكال الهندسية التي لا تتغير إذا تغضن الورق الذي يتم رسمها عليه ويسمى هذا العلم أيضاً بهندسة شرائح المطاط وهو شديد الفائدة في تصميم الدوائر الكهربائية المعقدة أو في دراسة عقد الحبال والجبر والهندسة وكل منها لغة رياضية وهما مرتبطتان علاقياً والمثلثات كحساب هو لغة أيضاً والاحتمالات والإحصاء لغة والذي يستخدم في التأمين والرقابة على نوع الإنتاج وفيه يتم تحديد زمن نوع مفعول الأدوية وعملية توحيد اللغات هذه تجرى باستمرار من قبل العملاء في الرياضيات وهذه اللغات تساعد العلوم على تفسير ظواهرها وحل المشكلات المتعلقة بها.

سادساً: إن طبيعة الرياضيات تظهر عندما نعلم أن معظم العلوم تعرف بالموضوعات التي تبحثها، أما الرياضيات فإنها تعرف بطرق البحث التي تتبع فيها فمثلاً إذا كان الموضوع هو إنتاج السلع والتأمين عليها فذلك علم الاقتصاد وإذا كان الموضوع يتعلق بدورة حياة ديدان الأرض أو الهضم في الإنسان فذلك هو علم الأحياء، أما الرياضيات فليس لها موضوع على الإطلاق فقد يتبادر إلى الذهن أن موضوع الرياضيات هو الأعداد والمقادير غير أن الواقع غير ذلك فمن الممكن إجراء عمليات تتناول الأعداد فحسب دون أن تعطي أي فكرة عن طبيعة الرياضيات، فالآلات التي تقوم بإجراء عمليات حسابية غاية في الدقة

والسرعة والتعقيد مع ذلك، فهذه الآلات ليست رياضيات والسؤال الذي يطرح نفسه إذا لم تكن الأعداد والمقادير هي كل ما تبحثه الرياضيات فما هي موضوعات الرياضيات إذن؟ ... الإجابة عن ذلك هو أنه لا يوجد أي موضوع معين كما عبر عن ذلك برتراند رسل «أننا عندما نتحدث عن الرياضيات فإننا لا نعرف ما الذي نتحدث عنه»، هذا الغموض في الرياضيات قد يتناقض مع كلامنا عن الرياضيات كأعظم ما أنتجه الفكر البشري وسبب هذا التناقض يعود إلى طبيعة التجريد وطبيعة الرموز فإذا ما فهم الفرد طبيعة التجريد تكشفت له روح الرياضيات.

سابعاً : إن طبيعة الرياضيات تكمن في قوتها فلو أنك تصورت المجيود الذي يبذل في قياس مساحة سطح الأرض مباشرة أو طول نصف قطرها أو قياس طول محيطها أو قياس بُعد الشمس عن الأرض أو أعماق البحار أو المحيطات لقلت أن ذلك معجزة أو خرافة ولكن الذي يحدث أن كثيراً من العلاقات الموجودة في العالم الواقعي يمكن نقلها إلى صورة رياضية بحيث يمكن إخضاعها للاستدلال الرياضي وهذا الناتج الاستدلالي يمكن إعادة نقله إلى نتائج الواقع باستخدام الرياضيات التطبيقية⁽¹⁰⁾.

ثامناً : إن ما يميز طبيعة الرياضيات هو طرقها التي لا تقتصر على بحث الكميات فإن ما يتناوله البحث هو الرموز وليس ما تعبر عنه هذه الرموز وإنما المهم هو قواعد البحث، فبالرغم من عدم وضوح صفحة مليئة بالرموز الرياضية إلا أننا لا نتصور الرياضيات بدون رموزها فنحن نستخدم الرموز C.B.A... للدلالة على الفئات وبالرغم من أهمية معرفتنا للمعنى الرمزي إلا أن الرموز دائماً لها صفة الشمولية وكذلك فالرموز تفيدنا في الاختصار لكم التعبيرات اللفظية التي تحمل العقل فوق طاقته، بالرغم من ذلك فإنه عندما استخدمت الرموز في الواقع في الرياضيات بادئ الأمر كانت تمثل الأعداد الطبيعية (1. 2. 3...) ومن ثم امتدت هذه المعاني إلى الكسور والجذور الصم

والأعداد غير القياسية والأعداد الحقيقية والأعداد التخيلية والتي تبدو بقواعد الجبر الابتدائية لا معنى لها ولكن تطور الرياضيات جعل من التطبيق أكثر شمولاً لدرجة اشتمال معنى الرموز لأشياء لا تشبه الأعداد بشيء كالعلاقات والرموز المنطقية، وثمة فرع من فروع الرياضيات يسمى المنطق الرياضي الذي تمثل فيه الرموز قضايا أو مجموعات من القضايا وهذه بهدف تسهيل عملية الدراسة والبحث في الموضوع.

تاسعاً: إن طبيعة الرياضيات تتميز بمظهر هام هو كفاءتها الهائلة فهي لغة علم دقيقة وموجزة (مختصرة) فعندما يكتب الرمز $(56)^2$ والذي يشمل على ثلاثة أرقام فقط فيكون التعبير اللفظي المعبر عنه هو أننا سنضيف ستة وخمسون وحدة ثم نضيف ستة وخمسون وحدة أخرى وهكذا نفعل ذلك ستة وخمسون مرة.

وبدل أن نجمع $1 + 2 + 3 + \dots + 1000$ جمعاً عادياً وتصور كم من الوقت نحتاج في ذلك فلقد سهلت الرياضيات هذه المهمة باستخدام قانون جمع المتوالية الحسابية بالقانون:

$$ح\ ن = \frac{ن}{2} (ح\ 1 + ح\ ن)$$

$$\frac{1000}{2} (1000 + 1) = 500500 =$$

حيث $ح\ 1$ الحد الأول، $ح\ ن$ الحد الأخير

وبسبب دقة الرياضيات هذه واختصارها فإنها نوع رائع من الكتابة المختصرة والذي زاد من روعتها عملية التعبير عن الأفكار المنطقية بأقصر وأوضح الطرق الممكنة وتتناسب في صورة مثالية مع الوصف الكمي للعلاقات المجردة فإذا قلنا أن أصل الرياضيات بدأ مع العد فإنه أيضاً يكون مع فكرة القياس.

وعلى سبيل المثال فالهندسة تتصل اتصالاً مباشراً بفن الزراعة والمساحة، ولعل المصريين القدماء استخدموا الثلاثية المشهورة (3، 4، 5) للتأكد من قياس الزوايا القائمة وهي نتيجة تؤكدتها نظرية فيثاغورث والخاصة بالمثلث القائم الزاوية ولعل المتتبع للحضارة الإغريقية (الفيثاغوريون) يجد أن فكرة العد لديهم كانت مرتبطة بفكرة الطول، وحيث أن الطول لا يمكن أن يكون سالباً لذلك لم يتوصلوا إلى الأعداد السالبة والتي تعامل معها العرب نظراً لارتباطهم بالتجارة وعمليات الربح والخسارة.

عاشراً : الرياضيات بطبيعتها أداة فالمعادلة الرياضية التي تكتشف يمكن استخدامها وتمثيلها في أكثر من ظاهرة في حقول مختلفة من حقول المعرفة وأن حل معادلة رياضية لا يعطي حلاً لمسألة واحدة بل لمسائل عديدة ترجع لتلك المعادلة، فالمعادلة الرياضية لفقاعة الصابون الممدودة على سلك هي نفسها المعادلة المستخدمة في دراسة قوة محركات الدفع في الطائرة أو غيرها، ولعل أكثر مجالات الكهرباء تعتمد في فكرتها على المعادلات الرياضية التي تتعلق بالكهرباء وجد أنها تمثل معادلة أساسية في حقل مختلف عن الكهرباء مثل حساب قوة الضغط الذي تحدثه عمارة مثل ناطحات السحاب مثلاً.

حادي عشر : أن طبيعة الرياضيات تقوم على أساس من التراكيب أو البنى الرياضية وفي كل تركيب رياضي تترك بعض المفاهيم دون تعريف على أن تكون هذه المفاهيم محدودة والعلة في تركها دون تعريف هو إعطاء الفرصة لتفسير مدلولاتها طبقاً لطبيعة التركيب الرياضي الذي سوف يُستخدم، فمثلاً لفظ مجموعة "Set" لفظ غير مُعرّف ولكن يفهم على أنه تجميع من العناصر المُعرّفة تعريفاً جيداً فإذا كان مجال الدراسة هو الجبر أو الحساب فإن العناصر تفسر على أنها أعداد وإذا كان مجال الدراسة هو الهندسة فإن العناصر تفسر على أنها نقاط وإذا كان المجال هو هندسة التحويلات فالعناصر عبارة عن تحويلات (الانعكاس أو الدوران أو الانتقال).

وإذا حاولنا أن نعرّف كل لفظ كما فعل أقليدس فإننا سندور في حلقة مفرغة، فأقليدس عرّف النقطة بأنها ما ليس له طول ولا عرض وهذا يقودنا إلى تعريف كل من الطول والعرض وهكذا، ويبني التركيب الرياضي أيضاً على مجموعة من التعاريف والمسلمات والعلاقات بحيث لا تتناقض هذه العلاقات وعلاقات أخرى ثبت صحتها منطقياً في نفس المجال.

وبالرغم من أن هناك بعض المفاهيم التي لها أساساً مبني على الحدس (في المفاهيم الفيزيائية) إلا أن هناك بعض المفاهيم ليس لها أساساً مفهوماً مثل المشتقة أو معدل التغيير بالرغم من أن لها علاقة بمفهوم فيزيائي هو السرعة والعجلة.

ولقد ظهرت خلال تاريخ الرياضيات مفاهيم جديدة بمظهر مشكوك فيه، فمثلاً فكرة الأعداد السالبة أو التخيلية رفضت من قبل بعض الرياضيين لكن هذه المفاهيم تصبح مقبولة عندما تصبح الفائدة في استخدامها دليلاً.

ثاني عشر : إن الرياضيات أقل بجزء قليل عن الكمال، ويحاول الرياضيون على مر العصور بحذف حالات عدم الكمال والتي كان لها أكبر الأثر في اكتشاف وخلق رياضيات جديدة وهي ما تعرف بالرياضيات الحديثة سواء في الهندسة أو الأنظمة الرياضية والنماذج الرياضية والتي تقدر بعشرة أمثال الرياضيات التي اكتشفت عبر العصور والأزمان وشملت جوانب الرياضيات الخمس وهي:

1 - الكمال : نقول النظام الرياضي كامل إذا كان من الممكن إثبات صحة أو عدم صحة كل نظرية ترتبط بالحدود المعرفة وغير المعرفة والمسلمات الخاصة بهذا النظام، أما إذا احتوى النظام على نظريات لم يستقر الرأي أو البحث العلمي على صحتها فنقول أن هذا النظام غير كامل.

2 - الاستقلال : يكون النظام الرياضي مستقلاً إذا لم يمكن استبدال مسلمات هذا النظام بمسلمات أخرى.

3 - النموذج : هو تفسير وتوضيح للحدود غير المعرفة (اللا معرفات) والتي تحول مسلمات النظام الرياضي إلى تقارير صحيحة.

4 - المطلق : يكون النظام الرياضي مطلقاً إذا كان كل زوج من النماذج لهذا النظام متشاكل.

5 - التآلف : ويقصد به أنه لا يمكن إثبات نظرية رياضية ونقيضها داخل هذا النظام من المسلمات، وعلى الرغم من الاكتشافات الهائلة التي ظهرت في الرياضيات إلا أن هناك بعض المشكلات لم يتوصلوا إلى حلول نهائية لها حتى الآن وهي ليست بالكثيرة وإنما هي توابع للاكتشافات العظيمة التي حدثت في علم الرياضيات بالمقارنة بتعدد فروع الرياضيات وتطبيقاتها⁽⁴⁵⁾.

ثالث عشر : الرياضيات بطبيعتها مثالية في كينونتها فالرياضيون مثاليون عندما يهملون سمك الخط المستقيم المرسوم بالقلم السميكة عند تعاملهم مع الخطوط المستقيمة أو اعتبارهم الأرض كرة تامة في المسائل وهي في مثاليتها هذه لا تبتعد عن الواقعية بُعداً خطيراً.

يضاف إلى المثالية أن الرياضيات ذات طبيعة جمالية وفنية في تناسقها وترتيبها وتسلسل الأفكار الواردة فيها وهي تُعبر عن رأي الفنان العالم الرياضي بأكثر الطرق فعالية واقتصاداً وهي تولد أفكاراً وبني رياضية تتم عن إبداع الرياضي وقدرته على التخيل وكذلك على الحدس⁽³⁴⁾.

وأخيراً... فإنه يمكن تحليل طبيعة ودور الرياضيات فيما قاله «نورث وايتهيد» في كتابه «العلم والعالم الحديث» لا شيء أكثر تأثيراً من حقيقة أنه كلما انسحبت الرياضيات إلى الطبقات العليا من الأفكار العظيمة والمجردة عادت ثانية إلى الأرض وبزيادة في أهمية تحليل الحقائق الملموسة، وبهذا تكون الأفكار المجردة السلاح الفعال في السيطرة على أفكارنا عن الحقائق الملموسة⁽²⁷⁾.

(2-3) فلسفة الرياضيات

يعتقد كثير من الناس أن الرياضيات هي علم الحقائق المطلقة وأنها -أي الرياضيات- من الممكن أن تقدم الحقائق المادية جاهزة للعلماء ولذلك يقال عنها أنها ملكة العلوم وأن الحساب هو ملك الرياضيات.

والرياضيات غالباً ما يضعها الرياضيين وهم غالباً أناس إما مكتشفون أو مخترعون للرياضيات وهم لا يعرفون ما إذا كانت الكائنات الرياضية موجودة ولا يعرفون ما إذا كانت النظريات الرياضية صادقة⁽¹²⁾.

وللرياضيات فلسفتها الخاصة والتي تتميز بالتالي :

أولاً : الرياضيات بمفهومها الفلسفي هي لعبة يضع فيها اللاعبون قواعدهم وقد لا يلعبون لأي غرض غير اللعب طبقاً للقواعد وقد يغير أي لاعب في أي وقت أية قاعدة بشرط ألا يؤدي هذا التغيير إلى قواعد متناقضة طالما كان في وسع شخص واحد أن يلعب في الرياضيات، وذلك لأن اللاعب لا يحتاج إلى موافقة شريك أو أكثر لتغيير قاعدة ما⁽¹⁰⁾، ومعنى ذلك أن الرياضيات بطبيعتها علم قائم على استنتاج قضايا أو حقائق من قضايا بسيطة أو مسلمات أو بديهيات يفترض صحتها.

والجدير بالذكر أن كلمة بديهية مأخوذة من المعنى الإغريقي (التفكير باستحقاق)، والإغريق هم الذين طرحوا فكرة البديهية واعتبر أفلاطون البديهيات الهندسية عبارة عن مجموعة حقائق معروفة سلفاً، أما أرسطو فلقد عبّر في كتابه «التحليل الهندسي» أن البديهيات معروفة بحقيقتها من خلال الحدس الذي لا يخطئ ويجب علينا امتلاك مثل هذه الحقائق التي هي أساس تفكيرنا، أما إذا كان علينا استخدام حقائق غير معروفة بصحتها (نظرية) سنحتاج إلى تفكير عقلي كي نثبت صحة هذه الحقائق وعلينا أيضاً تكرار مثل هذه العملية كثيراً.

ولكي نوضح فكرة استنتاج قضايا من حقائق أو مسلمات أو بديهيات

فعندما نقول أن القضية :
(إذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتين)

فلبرهنة هذه النظرية نحتاج إلى بديهيتين هما :

أ - إذا تساوت عدة كميات كل منها لكمية واحدة فإن تلك الكميات تساوي بعضها بعضاً.

ب - إذا تساوت كميتان وطرح من كل منهما كمية واحدة معينة فالكميات المتبقية متساوية.

وكذلك نحتاج إلى النظرية (قياس الزاوية المستقيمة 180°)

فلبرهنة أن :

$$\text{زاوية } 1 = \text{زاوية } 3$$

نجد أن :

$$\text{زاوية } 1 + \text{زاوية } 2 = 180^\circ$$

$$\text{زاوية } 3 + \text{زاوية } 2 = 180^\circ$$

$$\text{زاوية } 1 + \text{زاوية } 2 = \text{زاوية } 3 + \text{زاوية } 2$$

حسب البديهية ب فبطرح زاوية 2 من الكميتين في الطرفين تكون

النتيجة استناداً إلى البديهية السابقة الذكر (ب) أن : زاوية 1 = زاوية 3

والإثبات هنا قائم على النتيجة المنطقية للبديهيات أو المسلمات التي سلمنا

بصحتها وبحيث لا تتناقض هذه النتيجة مع القياسات.

وإذا كان لدينا قضية أو جملة شرطية صائبة مثل ب ← ج وتقرأ إذا

كانت القضية ب فإن القضية ج وهذه الجملة الشرطية يتحدد صوابها أو خطأها

بناءً على صواب أو خطأ مكوناتها كما يوضح ذلك الجدول التالي :

ب	ج	ب ← ج
ص	ص	ص
ص	خ	خ
خ	ص	ص
خ	خ	ص

من هذا الجدول المنطقي للقضية الشرطية الثنائية نجد أن الحكم يعتمد على مقدمة الشرط (ب) وجواب الشرط (ج) وتكون القضية خاطئة في حالة وحيدة عندما تكون المقدمة صائبة والنتيجة خاطئة. وكذلك فإن صواب أو خطأ هذه القضية لا يرتبط بنوع الجملة أو مجالها وعلى ذلك نحكم على القضية ب : $(2 + 2 = 7) \leftarrow$ للقط أربعة مخالف أنها قضية صائبة.

ومن هنا نلاحظ أننا استخدمنا في المقدمة للجملة أعدادًا تجمعهم علاقة وفي النتيجة صفة من صفات الحيوان وطبعًا لا يوجد ارتباط بين عملية الجمع وصفات القط. وعلى ذلك فلا عجب عندما نقول أن الرياضيين هم في الحقيقة أناس لا يعرفون ما إذا كانت الرياضيات موجودة في الواقع ولا يعرفون أيضًا ما إذا كان ما يكتبونه في الرياضيات من براهين واستنتاجات صحيحة أم لا ؟ إذ ليس ثمة وسيلة لتقرير صدق أو خطأ البديهيات أو المسلمات وهذا ما قصده برتراند رسل عندما قال نحن الرياضيون لا نعرف أبدًا فيما إذا كان ما نقوله في الرياضيات صحيحًا أم لا.

ثانيًا : يؤكد أفلاطون (427-347 ق.م) في كتابه «الجمهورية» أن الحقيقة الملازمة لظواهر الأشياء والتي هي حقيقة متوازنة حقيقة رياضية ولفهم الواقع يجب استتباط الظواهر عن العالم المحيط بدون فرضها عليه والرياضيات

هي القاعدة الرئيسية في أصل الوجود كما إنها الحقيقة الخالدة⁽¹⁸⁾.

وللتأكيد على أهمية الرياضيات وتميزها عن باقي العلوم من خلال قابلية العقل على إدراك قوانين ليس لها القدرة على وصف العالم الخارجي فحسب بل إنها تتبأ بماهية هذا العالم الخارجي والذي تحكمه علاقات رياضية.

ونجد أن أفلاطون اعتبر الرياضيات جزءاً من نظام عام هو العالم غير المادي أو عالم ما وراء الطبيعة أو عالم الأفكار المثالية.

ثالثاً : يقول عالم الرياضيات الشهير «ديفيد جلبرت» سنة 1900 إن الرياضيات أساس المعرفة الحقيقية للظواهر الطبيعية وأن بعض العلوم تتكون من مجموعة نظريات رياضية مزخرفة بحقائق فيزيائية قليلة وعلى النقيض من الانطباعات التي يحصل عليها الطلبة في مدارسهم لا تعتبر الرياضيات مجموعة من طرق الاستنتاج التقني بل تخبرنا عن غير ما هو معروف في ظواهر أساسية وفي بعض الحالات تناقض إدراكنا الحسي فهي جوهر معرفتنا بالعالم الفيزيائي كما أنها لا تسمو فوق إدراكاتنا فحسب بل تفوقها.

رابعاً : يمكن تقسيم الرياضيين إلى مدرستين من مدارس الفكر هما:

أ - مدرسة تؤمن أن الرياضيات توجد في الطبيعة كما أن بعض قوانين معينة توجد في الطبيعة.

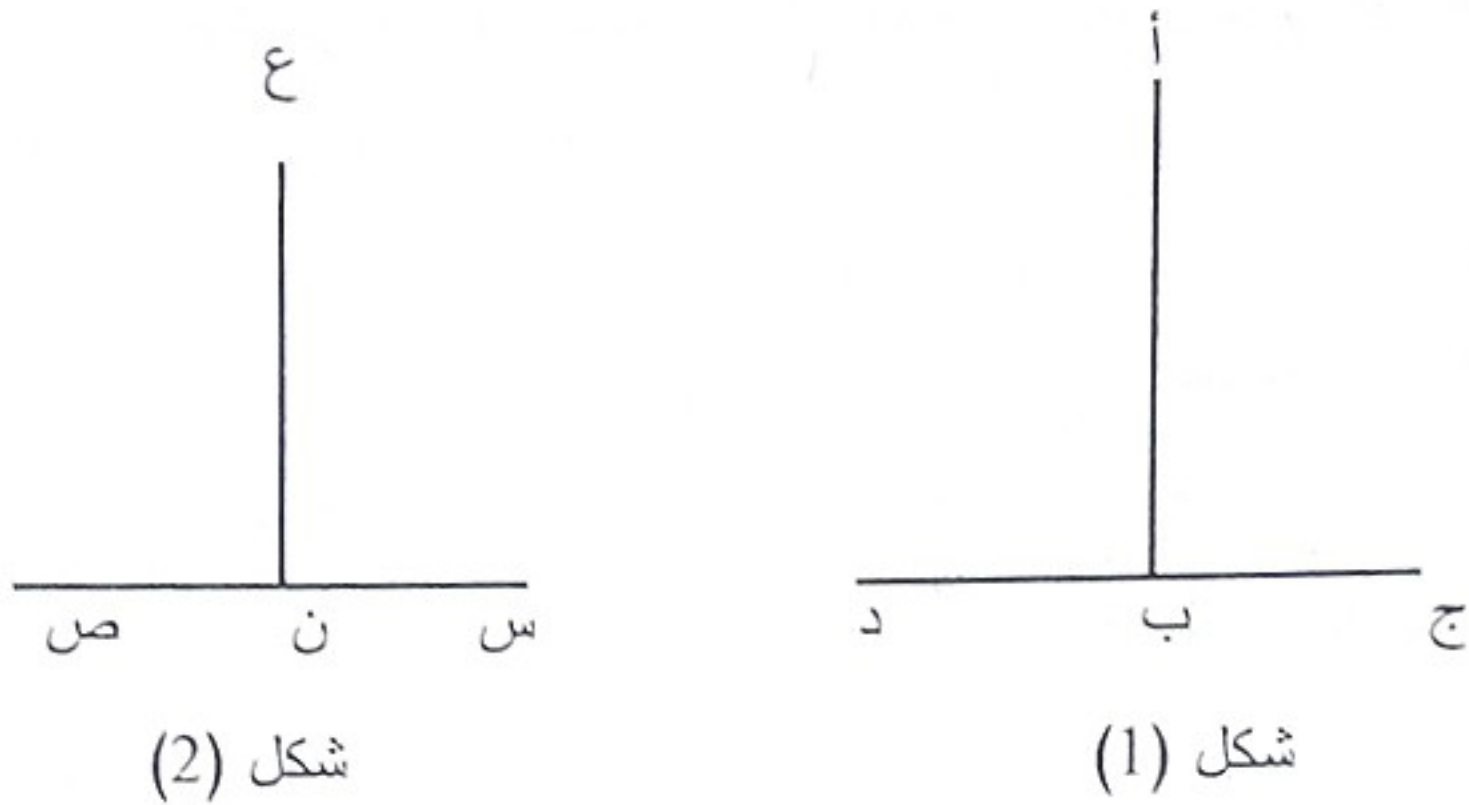
ب - مدرسة ترى أن الرياضيات مثل الفن وهذا الفن لا يأتي إلا من هذه الحالة أن الرياضي هو ما يخلق الرياضيات.

والبعض الآخر من أمثال «كرونكر» يؤمن أن الله خلق الإنسان والباقي صنعه الإنسان⁽⁴⁵⁾.

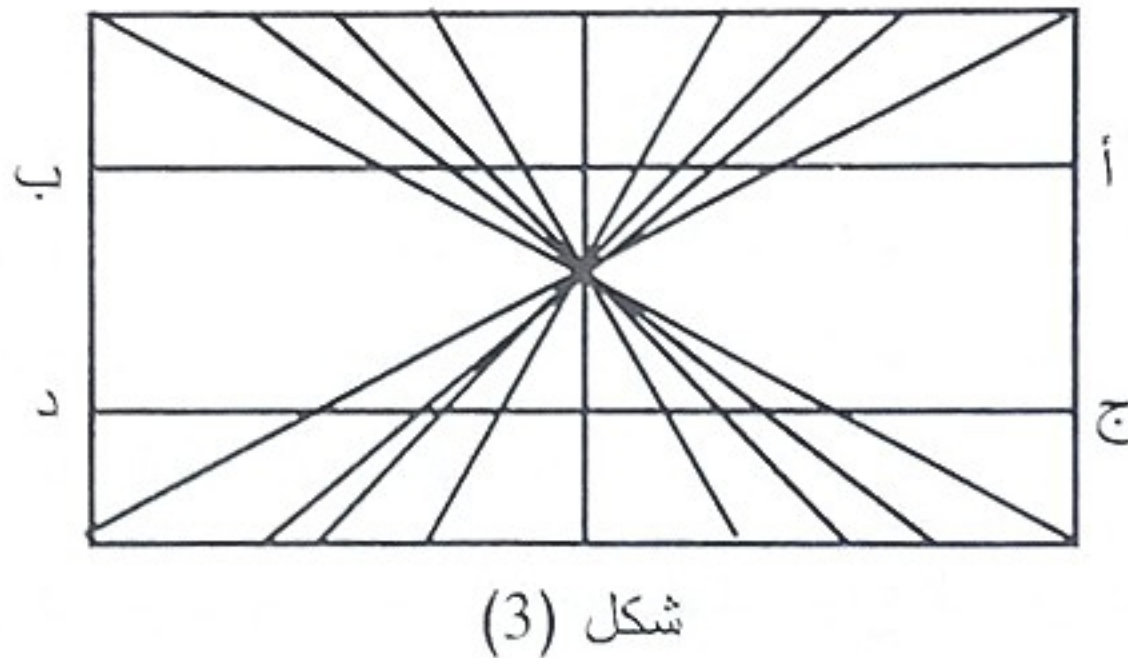
خامساً : غالبية الرياضيات لا تعتمد على التجربة أو الحواس لأن

إدراكنا الحسي يولد انطباعاً غير مباشر عن هذا العالم أو عن الحقيقة الفيزيائية

فالحواس مخدوعة في إدراكها من جهة، ومن جهة أخرى فإنها تخدع في بعض الأحيان، ولذلك فالتقة المطلقة بحواسنا قد تقودنا إلى الفاجعة ولناخذ مثلاً على خداع الحواس من قبيل حاسة البصر، فالعالم «هيرمان هيلمهولتز» (1821-1894) رسم الشكل (1) ويبدو واضحاً من الشكل أن الخط العمودي أ ب أطول من الخط الأفقي «ج د» ولكنهما في الحقيقة متساويين في الطول، وفي الشكل (2) يبدو الخط العمودي «ع ن» والخط الأفقي «س ص» متساويين في الطول لكن الحقيقة أن العرض هو الأطول أي «س ص» أطول من «ع ن».



كذلك نجد من خداع البصر والذي نشره «هيرنك» سنة 1861 يبدو أن الخطين المستقيمين أ ب، ج د وكأنهما منحنيان من جراء تقاطعهما مع الخطوط المائلة شكل (3):



والصورة في شكل (4) من تصميم «فرانز مولر» 1899 توضح أن الخطين أ ب، ج د غير متساويين في حين أنهما متساويان في الطول.



شكل (4)

وعموماً فالرياضيات ظهرت أول ما ظهرت لتصحيح الإدراكات الحسية وتوسيع المعرفة البشرية بالعالم المحيط بنا، فجوهر الرياضيات يرسم للعقل البشري المعرفة بالعالم الفيزيائي المحيط بنا.

كذلك من ظواهر خداع البصر والتي تعتمد على انكسار الضوء هي ظاهرة السراب والتي تحدث في أيام الصيف الحار حيث ترى الطريق من بعيد وكأنه مغطى بالماء ولكن عندما تقترب من هذا المكان تجده جافاً لا ماء فيه.

وأيضاً من خداع البصر رؤية لون ماء البحر أزرقاً في حين أنك عندما تغرف غرفة من هذا الماء تجد لا لون له.

وما ينطبق على خداع البصر ينطبق مثله على خداع الذوق؛ فالشراب حلو المذاق يصبح تدريجياً أقل حلاوة، فمثلاً حاول أن تحتفظ بمحلول قوي من الماء والسكر بفمك لثوان قليلة ثم تذوق بعدها ماءً نقياً ستجد أن الماء النقي مذاقه مالحاً لاذعاً.

كذلك نجد خداع اللمس؛ فعند غمس يدك اليمنى في وعاء به ماء بارد ويدك اليسرى في وعاء به ماء حار وبعد دقائق اغمس كلتا يديك في ماء دافئ تجد أن اليد اليمنى والتي كانت في الماء البارد تشعر بالسخونة ويدك اليسرى التي كانت في الماء الحار تشعر بالبرودة.

ولكي نتلافى خداع الحواس هذه وكذلك أنواع الحدس الخاطي فلا بد من

استخدام الرياضيات كي ترشدنا عن معالم العالم المحيط بنا بدرجة كبيرة وتعزز معلوماتنا عن هذا العالم الفيزيائي.

ولقد استطاع الإغريق منذ القرن السادس قبل الميلاد فهم الطبيعة واعتبروا أن الظواهر الفيزيائية تتبع وبدقة خطة ثابتة ذات أساس رياضي في جوهرها، وبمجيء الفيثاغوريثون طرحوا برنامج اكتشاف تركيب الطبيعة الحاجة إلى الرياضيات حيث نجدهم وجدوا أن :

أ - بعض الظواهر والتي لها أشكال فيزيائية متنوعة لها نفس العلاقة الرياضية، فالقمر والكرة المطاطية لهما نفس الشكل وكذلك لهما الكثير من الصفات العامة للكرات.

ب - جوهر العلاقات الرياضية في الأرقام والعلاقات الرقمية، فالرقم كان الأداة الرئيسية في وصف الطبيعة وكان هو المادة وكذلك شكل العالم.

ج - كل شيء عبارة عن رقم حتى أنهم صوروا الأرقام على شكل نقاط كما وأنهم رتبوا مثل هذه النقاط بأشكال هندسية كل واحد منها يمكن أن يعبر عن جسم حقيقي⁽¹⁸⁾.

د - إن الطبيعة مركبة من سلسلة رباعية، فالعناصر الهندسية الأربعة هي (النقط، الخط، السطح، الجسم) والعناصر المادية الأربعة هي (الأرض، الهواء، النار، الماء).

هـ - إن الأرقام الأربعة للمجموعة الرباعية جمعت مع بعضها لتكون الرقم 10 وبذلك أصبح الرقم عشرة هو الرقم المثالي الذي يمثل العالم.

وعموماً فالرياضيات ظهرت أول ما ظهرت لتصحيح الإدراكات الحسية وتوسيع المعرفة البشرية بالعالم المحيط بنا، فجوهر الرياضيات يرسم للعقل البشري المعرفة بالعالم الفيزيائي المحيط بنا.

(2-4) اتجاهات حديثة في تدريس الرياضيات :

تعتبر الرياضيات بحق ملكة العلوم لأنها تزود العلوم الأخرى بأساليب التفكير وحل المشكلات من جهة، ومن جهة أخرى تساهم في حل مشكلات هذه العلوم.

ولقد شهد القرن العشرين تطوراً هائلاً في مجال الرياضيات حيث وجدنا أن المعرفة الرياضية غدت تتضاعف كل عشرة سنوات ولعل المهتم بتاريخ الرياضيات يجد أن عصر «نيوتن» إنما هو بداية التقدم والنهضة في عالم الرياضيات وأن القرنين التاسع عشر والعشرين قد أضافا للرياضيات أبحاثاً عميقة ذات شأن عظيم وأن نتيجة هذه الأبحاث هي خلق فروع جديدة لهذا العلم مما أدى إلى تسمية هذا العصر الذي نعيش فيه بالعصر الذهبي للعلوم الرياضية.

والعلوم الرياضية في ثوبها الجديد يطلق عليها اسم الرياضيات الحديثة ويرجع هذا اللقب إلى العالم الرياضي المشهور فيليكس كلاين (1849-1925)، من هنا ظهرت الحاجة لمواكبة هذا التطور في مجال المعرفة الرياضية المقدمة للمتعلمين وفي مجال تدريسها، وتبع هذا التطور ظهور اتجاهات وأفكار وآراء حديثة في مجال تدريس الرياضيات على مستوى كل من المحتوى وطرائق التدريس وانعكاس ذلك على المعلمين والمتعلمين.

أهداف تطوير الرياضيات الكلاسيكية :

- 1 - تقليل الفجوة بين الرياضيات المدرسية والرياضيات المعاصرة بمعنى التقريب بينهما من حيث المحتوى وطريقة التدريس المتبعة.
- 2 - الربط بين الرياضيات القديمة والمعاصرة والحديثة بما يخدم النمو الحضاري ومتطلبات الحياة، فالحياة ومتطلباتها أصبحت أكثر تعقيداً من قبل.
- 3 - العمل على جعل الرياضيات المدرسية بناءً متماسكاً في وحدة كلية

لا انفصام بين مكوناتها من خلال تركيبات رياضية عامة عناصرها قد تكون أعداداً أو متجهات أو نقاطاً أو تحويلات هندسية.

4 - جعل الرياضيات المدرسية أداة يمكن استخدامها في الدراسة النظرية وكذلك في التطبيقات العملية خاصة الأنشطة العملية والعلمية.

5 - إعادة تنظيم الرياضيات التقليدية وتجميعها حول مفاهيم أكثر شمولاً وامتداداً في فروع الرياضيات المختلفة مثل مفاهيم الفئة "Set" والمجال "Field" والحلقة "Ring" والزمرة "Group" وغيرها.

6 - تحويل الرياضيات من مفهومها التقليدي على أنها دراسة للعدد والفراغ إلى أنها دراسة للتركيب الرياضي والأنماط والنماذج الرياضية مع دراسة العدد والفراغ من خلال تركيبات وأنماط رياضية أكثر شمولاً وهذا ما ساعد على تطور مفاهيم العدد والفراغ.

7 - الاتجاه نحو التجريد والتحرر من قيود المحسوسات لإعطاء إمكانيات أكبر لانطلاق الفكر الرياضي كما حدث في الهندسات اللا إقليدية مثل هندسة يوليائي ولوباتسفسكي وريمان والهندسة المحدودة العناصر وكذلك الهندسة النونية الأبعاد على أن هذا الاتجاه زاد من استخدام الرياضيات في التطبيقات العملية.

8 - لما كان الهدف من تدريس الرياضيات هو إعداد الفرد للحياة العامة بصرف النظر عن تطلعاته المستقبلية وكذلك إعداد الفرد لمواصلة دراساته في الرياضيات نفسها أو في موضوعات أخرى أثناء وجوده في المدرسة وبعد تخرجه منها نجد أن الرياضيات الحديثة تساعد في إعداد السليم للفرد في الحياة العامة وفي الحياة العملية فلا يمكن الاستغناء مثلاً عن الرياضيات الحديثة في الطبيعة (الفيزياء) والهندسة مثل (المصفوفات، التحويلات الهندسية، المعادلات التفاضلية الجزئية والعادية، التحليل المركب، الجبر المجرد، التوزيعات، الطرق أو التحليل

العددي، فراغات هيلبرت)، كذلك لقد أوضحت الأبحاث السيكلوجية أن مفاهيم الرياضيات الحديثة أبسط وأقرب إلى ذهن التلميذ من مفاهيم كثيرة في الرياضيات التقليدية بالإضافة إلى أن الرياضيات الحديثة قائمة على توضيح الأسس المختلفة للبناء الرياضي الذي لبناته الأولى هي المفاهيم مما يسهل استيعاب المادة المقررة للفرد العادي كما الحال مع الفرد الذي يشتغل بالرياضيات أو تطبيقاتها.

9 - التأكيد على الناحية التطبيقية للرياضيات حيث يتم التطبيق على ما يدرسه التلاميذ من رياضيات سواء في مجال الرياضيات نفسها من خلال التمارين والمشاكل الرياضية التي توضح الجانب التطبيقي أو من خلال دراسة تطبيقات الرياضيات في المواد الأخرى مثل التطبيقات الفيزيائية للمشتقة أو التطبيقات الهندسية للمشتقة وكيفية حساب المساحات والحجوم الدورانية.

10 - توضيح الأسس الجبرية والهندسية وتفاعلاتها في خدمة بعضها فأساس تدريس التحليل الرياضي يقوم على جبر الفئات وحقل الأعداد الحقيقية وكذلك الدوال الحقيقية وغير الحقيقية والجبر الخطي والمجموعات والتوبولوجي وهذه الأسس الجبرية نحتاج إليها في دراسة الهندسة والتي نغنى بها في المرحلة الثانوية في البرامج الحديثة.

كذلك فالهندسة تقدم للتحليل الرياضي عن طريق إطارها التوبولوجي الوسائل (مفهوم الفئة المحدبة) والتفسيرات للتحليل الرياضي بينما يقدم التحليل الرياضي للجبر فئات غنية من المجموعات ومتجهات الفراغ.

11 - استخدام الطريقة البديهية (التركيبات الرياضية القائمة على النظام البديهي) والمعلوم أن التركيب الرياضي يتكون من :

(أ) مسميات أو اصطلاحات أولية أو بلغة أخرى فئة من العناصر

وفئة من الفئات قد تكون هذه العناصر نقطاً أو مستويات أو أعداد.

(ب) علاقة أولية أو أكثر تربط بين هذه العناصر مثل علاقة البينية أو التساوي أو عملية جبرية مثل الاتحاد أو التقاطع أو الجمع والضرب.

(ج) بديهيات (مسلمات) تحدد خواص العلاقة.

(د) نظريات (نتائج منطقية) تستق دون أي فروض تخص طبيعة العناصر المأخوذة.

أنواع من التركيبات الرياضية :

- 1 - التركيبات الجبرية مثل الحلقة والحقل والزمرة.
- 2 - تركيبات الترتيب وفيها تكون العلاقة $>$ أو $\geq$
- 3 - التركيبات التوبولوجية والعلاقة «توبولوجي».

مميزات الطريقة البديهية :

- 1 - التوفير في الرموز.
- 2 - توحيد الرياضيات.
- 3 - الديناميكية بين العناصر الرياضية.
- 4 - التكيف للعالم الطبيعي (استخدام أكبر للتطبيقات النظرية في الطبيعة).
- 5 - التخلص من الصعوبات الميتافيزيقية.
- 6 - التوسع والنمو في الرياضيات.

والجدير بالذكر أن الاتجاهات الحديثة أو النظرة الحديثة للرياضيات تمحورت في اتجاهين أساسيين هما محتوى الرياضيات وطرائق تدريسها.

(2-4) أولاً : بالنسبة للمحتوى :

ظهرت مفاهيم رياضية مثل الفئات والعمليات عليها والعلاقات والدوال والبنى الجبرية مثل الزمر والحلقات والحقول، كذلك نجد الجبر الهندسي مثل الفراغات الاتجاهية والجبر الخطي وموضوعات رياضية مثل المنطق الرياضي

ورياضيات الحاسبات الإلكترونية ونظم العد المختلفة وظهرت هندسات غير إقليدية مثل الهندسة الزائدية والهندسة الناقصية والتوبولوجي ولنوضح هذه النواحي بشيء من التفصيل.

أ - المعلوم أن الرياضيات التقليدية كانت تتمحور في دراسة العدد والفراغ، وكان من نتائج دراسة العدد ما نعرفه بالحساب والجبر والتحليل ومن دراسة الفراغ ما نعرفه بالهندسة، ولقد حدث نمو ونضوج في المفاهيم الأساسية لهذا المحور التقليدي ونقصد بذلك الهندسة مثل ما حدث من تعميم في مفهوم العدد ومن تعدد في الفراغات الهندسية وربط العدد بالفراغ وتقدم في التحليل وتطور في مفهوم الدالة.

ففي مجال العدد تطورت مجموعات الأعداد من مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural Numbers) $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ إلى مجموعة الأعداد الصحيحة (Integers) $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ومجموعة الأعداد القياسية (النسبية) (Rational Numbers) ويعبر عنها بلغة الفئات (المجموعات) $Q = \left\{ \frac{a}{b} : a \in Z, b \neq 0 \right\}$ ومن ثم مجموعة الأعداد غير القياسية (Irrational) ويقصد بها مجموعة الأعداد التي لا يمكن التعبير عنها بالصورة $\frac{a}{b}$ مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$ ، π ، هـ (العدد النيبيري) ونجد مجموعة الأعداد الحقيقية (Real Numbers) وهي عبارة عن اتحاد مجموعتي الأعداد القياسية والأعداد غير القياسية $R = Q \cup Q'$ حيث Q' نرمز بها لمجموعة الأعداد غير القياسية. كذلك نجد مجموعة الأعداد المركبة (Complex Numbers) وتشمل الأعداد التي بالصورة $a + bi$ حيث a, b عدنان حقيقيان، $i = \sqrt{-1}$ مثل $3 + 5i$.

هذه المجموعات العددية ارتبطت فيما يسمى بالأنظمة العددية.

والسؤال الذي يطرح نفسه ما المقصود بالنظام العددي ؟ والإجابة عن ذلك أنه عبارة عن فئة (مجموعة) من الأعداد معرف عليها عملية ثنائية على

الأقل وتتحقق في هذا النظام مجموعة من الشروط أو الخواص مثل :

1 - خاصية الانغلاق Closure property

بمعنى أن المجموعة S مغلقة تحت العملية $*$ (مثلاً إذا تحقق أن ناتج أي عددين a, b مثلاً عندما نطبق عليهما العملية $*$ يكون عنصراً j ينتمي إلى نفس المجموعة S ونعبر عن ذلك رياضياً.

$$a, b \in S, a * b = j \in S$$

فمثلاً مجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة تحت عملية الجمع لأن مجموع أي عددين صحيحين يكون عدداً صحيحاً.

أما المجموعة $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ أي مجموعة الأعداد الفردية الموجبة فهي ليست مغلقة تحت عملية الجمع العادية لأن $1 + 3 = 4$ وهذا ليس عنصراً في المجموعة.

2 - الخاصية الإبدالية Commutative Property

بمعنى أنه لأي عددين a, b مثلاً ينتميان إلى المجموعة S يكون

$$a * b = b * a$$

فمثلاً عند جمع العددين 7، 9 فإن الناتج هو نفسه سواء أخذنا $9 + 7$ أو $7 + 9$.

ولكن إذا أخذنا عملية الطرح العادية فإن $9 - 7 = 2$ وأن $7 - 9 = -2$ وعلى ذلك $9 - 7 \neq 7 - 9$.

إذن في هذه الحالة لا تتوفر الخاصية الإبدالية.

3 - خاصية التنسيق (التجميعية) Associative property

بمعنى أنه لأي ثلاث أعداد (عناصر) a, b, j تكون $*$

تجميعية إذا تحقق :

$$(a * b) * j = a * (b * j)$$

فمثلاً عملية الجمع العادية وعملية الضرب العادية على مجموعة الأعداد

الصحيحة تحقق خاصية التجميع (التجميع) حيث :

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{لكل } a, b, c \text{ ص}$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \quad \text{لكل } a, b, c \text{ ص}$$

حيث ص هنا ترمز لمجموعة الأعداد الصحيحة.

أما إذا أخذنا عملية القسمة على مجموعة الأعداد الصحيحة فهي ليست

$$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c) \quad \text{لا يساوي دائماً}$$

حيث مثلاً : ليكن لدينا 4، 8، 16 ص

$$(4 \div 8) \div 16 = 4 \div (8 \div 16) = 4 \div 2 = 2 \quad \text{ص}$$

$$(4 \div 8) \div 16 = 4 \div (8 \div 16) = 4 \div 2 = 2 \quad \text{ص}$$

واضح أن الناتجين غير متساويين.

4 - خاصية التوزيع Distributive property

هنا يكون لدينا عمليتان +، × مثلاً معرفتان على المجموعة س

نقول أن هذا النظام (س، +، ×) يحقق خاصية التوزيع حيث تتوزع العملية ×

على العملية + إذا تحقق لكل أ، ب، ج ص يكون :

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

مثال على ذلك الأعداد الصحيحة 2، 5، 3 نجد :

$$16 = 3 \times 2 + 5 \times 2 = (3 + 5) \times 2$$

ولقد ظهرت تركيبات أكثر عمومية مثل الزمرة Group وكذلك الحلقة

Ring والمجال (الحقل) Field وفراغ المتجه Vector Space وهناك من

التركيب الرياضية تتكون من فئات عناصرها غير عددية والعمليات المعرفة

عليها غير الجمع والضرب العاديتين مثل فئة المصفوفات من الرتبة 2 وعملية

جمع المصفوفات وكذلك عملية ضرب المصفوفات كذلك فئة البواقي في حساب

المقياس وعمليات الجمع أو الضرب بمقياس.

كذلك نجد جبر القضايا حيث عناصره عبارة عن جمل أو قضايا Statements قد لا يكون لها أحياناً علاقة مطلقة بالأعداد والعمليات على الأعداد ولكنها تعتمد على أدوات الربط المنطقية مثل و (∧)، أو (∨)، إذا كان... فإن... (←) فعندما نقول لدينا القضية المنطقية « $36 = 7 \times 3$ ← الأرانب من أكلة اللحوم» هذه قضية منطقية يعتمد صوابها أو خطاها على قواعد جبر القضايا المنطقية وعلى ضوء قواعد المنطق الرياضي فالقضية السابقة تعتبر قضية صائبة.

ثانياً : (2-5) بالنسبة لطرائق التدريس

إن المتتبع للتغيرات التربوية في عمليتي التعليم والتعلم يجد أنه من الضرورة أن تقوم برامج إعداد المعلم على المعرفة المتعمقة للمجال الذي يقوم بتدريسه وكذلك على الثقافة العامة والمعرفة المهنية بما تشمله من مهارات مهنية متعلقة بإدارة الفصل وقوانين المدرسة والنواحي الاجتماعية داخل المناخ المدرسي.

ويورد سميث "Smith" ستة محددات تمثل المعرفة المهنية ومنها اختيار طرق التدريس المناسبة.

وعملية التعليم والتعلم تلزم المعلم لكي يتحرك ليجمع الجديد من النظريات والطرائق في مجال التدريس ويطوعها بحيث تتلاءم مع المناخ التعليمي الصفّي وتؤدي إلى منتج تعليمي إيجابي ويتم ذلك من خلال ما يأتي:

1 - أن دور المعلم لا يقف عند مجرد إلقاء كم المعلومات على التلاميذ وهم مستمعين إليه أو يكتبون الحلول والملخصات السبورية وينتهي الدرس بكلمات من المعلم نكمل في الدرس القادم بعد أن يكون قد نظر إلى ساعة يده عند سماع جرس انتهاء الحصة.

معنى ذلك أنه لم ينهي درسه على أكمل وجه ويعني ذلك أن تخطيطه لهذا الدرس

لم يستكمل وأن أهداف الدرس لم تحقق كاملة، كما أن التلاميذ لم يقوموا بعملية التطبيق على ما درسوه في هذه الحصة ونقصد بالتطبيق ليس مجرد تمارين شبيهة بالأمثلة المعطاة لهم وإنما أن يطبق التلاميذ ما تعلموه في مواقف أخرى مختلفة عنها.

2 - أنه لا بد أن يكون لكل معلم فلسفة خاصة في التعليم (التدريس) وطريقة تدريسية مبنية على هذه الفلسفة وبحيث تتكيف هذه الطريقة مع اختلاف وتغير الدروس والفلسفات كثيرة منها المثالية والواقعية التقدمية والفلسفة الوجودية والفلسفة البراجماتية وغيرها... وطرائق التدريس كثيرة منها طريقة الإلقاء وطريقة المحاضرة وطريقة المناقشة والطريقة الاستقرائية والطريقة الاستنتاجية وطريقة الاكتشاف المفتوح والإرشادي وطريقة التعلم المبنية على أفكار بياجيه⁽³³⁾ مثل دورة التعلم.

وبالرغم من ذلك نجد تشابه طرائق التدريس المتبعة في مدارسنا حيث الطابع العام لها مزيج من طريقة المحاضرة والمبنية على الشرح بغرض الفهم للمادة العلمية التي يتضمنها المقرر من خلال الكتاب المدرسي ويكون معيار الفهم هو نتيجة الامتحان، فالنجاح في الامتحان هو الهدف وبقدر ما تكون نسبة النجاح عالية بقدر ما يكون المعلم ناجحاً ومرضياً عنه من قبل إدارة المدرسة، ولا ضير بعد ذلك أن قام المعلم بوضع نماذج سهلة من الامتحانات لتلاميذه لكي يتمكنوا من النجاح وبسهولة أو أن يحاول زيادة درجاتهم في أعمال السنة لكي تكون معيناً لهم على النجاح في الامتحان النهائي.

3 - وجود أهداف تربوية في المجال المعرفي Cognitive Domain تركز على جوانب المعرفة Knowledge أو التذكر Recall وكذلك الفهم Comprehension والتطبيق Application والتحليل Analysis والتركيب Synthesis والتقويم Evaluation.

وفي المجال الوجداني Affective Domain نجد أهدافاً في مجال

الاتجاهات Attitudes والميول Interests والقيم Values والتقدير Valuing للوصول إلى الاتزان في هذه المجالات.

وفي المجال النفس حركي Psychomotor Domain أو المجال المهاري والذي يتصل بتنمية الجوانب الجسمية الحركية والتنسيق بين الحركات وأصبحت الأهداف ليست قاصرة على ملاحظة الأداء أو التقليد أو التمرين بل الوصول إلى إتقان المهارة وتطويرها.

وجود هذه الأهداف المعرفية والوجدانية والمهارة تجعل الحاجة ماسة إلى طرائق تدريس مناسبة تعمل على تحقيق هذه الأهداف من خلال تكامل بين المعلم الجيد والمحتوى الجيد والمناخ التعليمي المناسب.

(2-5) طريقة التدريس

يقصد بطريقة التدريس الأنشطة المتعددة والمقصودة التي يوجهها المدرس إلى تلاميذه بهدف تحقيق الأهداف أو مساعدة التلاميذ على اكتساب وفهم معلومات ومعارف ومهارات وتنمية عادات وميول مقبولة اجتماعيًا وتشجيع التلاميذ على الإبداع والابتكار من خلال عمليات الحس والاستبصار. وبمعنى مختصر فإن طريقة التدريس عبارة عن مجموعة الأنشطة الموجهة لكي تحقق الأهداف المنشودة في المجال المعرفي والمجال الانفعالي والمجال النفس حركي للمتعلم.

✦ وتنقسم طرائق التدريس إلى مجموعتين رئيسيتين هما :

أولاً : مجموعة العرض

وفيها يقوم المعلم بدور الملقن أو ناقل للمعلومات بينما يكون المتعلم في وضع المستقبل لهذه المعلومات والاتصال هنا غالبًا ما يكون في اتجاه واحد من المعلم إلى المتعلم وأحيانًا يكون الاتصال في اتجاهين عندما يسأل المعلم بعض المتعلمين أو العكس ويندرج تحت هذه المجموعة :

- 2 - الطريقة الاستنباطية.
- 3 - الطريقة الاستقرائية حيث التركيز يكون على المعلم وليس المتعلم.

ثانيًا : مجموعة الاكتشاف

في هذه المجموعة يقوم المعلم بدور الموجه أو المرشد أثناء عملية التدريس بينما يكون المتعلم في حالة إيجابية يدون المعلومات المتاحة لديه ويحللها ويفحصها ويربط بين أجزاءها ويستنبط منها علاقات أو يصل إلى تعميمات وقد يكون التوجيه جزئيًا أو معدومًا ويندرج تحت هذه المجموعة :

- 1 - الطريقة الاستقرائية : حيث يكون التركيز على المتعلم وليس المعلم للوصول إلى القاعدة أو التعميم.
- 2 - طريقة حل المشكلات.
- 3 - طريقة دورة التعلم.
- 4 - طريقة الاكتشاف (الموجه - الإرشادي - المفتوح - الحر).

إن من خلال الاتجاهات الحديثة للرياضيات في مجالي المحتوى وطرق التدريس يمكن الوصول إلى :

- 1 - تدريس الرياضيات ككل متحد فالاتجاهات الحديثة تنظر إلى الرياضيات كفئة من الأبنية أو التراكيب كلها مرتبطة بشدة ويمكن تطبيقها على حالات كثيرة مختلفة، والرياضيات هذا النظام المبني على أساس استخدام مفاهيم عامة أساسية مثل الفئة والعلاقة والدالة والمجموعة والمتجه وكلها تستخدم كمدخل لمعالجة موضوعات رياضية، ولذلك أصبحنا نجد تغير النظرة من تجمع لفروع منفصلة غير مترابطة إلى النظر إلى الرياضيات كفئة من الأبنية المترابطة.

- 2 - تدريس المنطق الشكلي، فالواقع أن كثيرًا من الرياضيين والفلاسفة يختلفون على ماهية العلاقة بين الرياضيات والمنطق ولكنهم يتفقون

على أن التفكير الرياضي منطقي في طبيعته وأن الرياضيات الصحيحة هي أيضًا بالضرورة منطقية في طبيعتها فالواقع أن كل من المنطق والرياضيات يتضمن استنتاجات دون وجود تأكيد على حقائق خاصة بعالم الأشياء في أي منهما والاتجاهات الحديثة تؤكد دور المنطق الرياضي من حيث أنه هو الذي يحدد من الناحية الشكلية عما إذا كان استنتاج جملة من سابقاتها ممكنًا أم لا وتؤكد دقة اللغة.

3 - الاهتمام بتدريس المفاهيم الرياضية، فلم يعد تدريس الرياضيات منصبًا على اكتساب المهارة في إجراء العمليات والخوارزميات بل أصبح التركيز على المفاهيم مع العناية بتنمية المهارات والابتعاد عن التدريب الآلي والاهتمام بدراسة الخواص والمبادئ الرئيسية للمفاهيم واستراتيجيات تدريسها.

4 - الأخذ بالاتجاه الحزوني في بناء وتدريس مناهج الرياضيات ويقصد بذلك تدريس الموضوعات الرياضية في مراحل مختلفة بشرط أن تتناسب مع مستويات أعمارهم فمن الممكن تدريس موضوع الفئات في المرحلة الابتدائية وكذلك الإعدادية والثانوية ولكن بشرط مراعاة المستوى العمري لكل فئة من المتعلمين ومراعاة الكم والنوع ودرجة التجريد للمادة المقدمة.

5 - التأكيد على التعلم بالاكشاف وكذلك أسلوب حل المشكلات واللتان تركزان على فاعلية التلميذ وإيجابيته حيث تعطي الفرصة للتلاميذ لاكتشاف بعض المفاهيم أو الحقائق العلمية من خلال إعطائهم الفرصة للعب والعمل بالأدوات التعليمية من جهة أو من خلال وضعهم في موقف مشكل مما يثير دافعيتهم نحو التعلم⁽⁴⁶⁾.

ولقد زاد الاهتمام بهذين النوعين من التعلم وذلك تأكيدًا لدور التفكير الاستدلالي في جميع فروع الرياضيات وليس الهندسة فقط وبالبعد عن كون التلميذ في أن يكون متلقيًا للمعلومات فقط.

6 - تعويد التلميذ على الفئات ولغتها والعمليات الخاصة بها وتطبيقاتها مبكراً كلما أمكن وقد بينت أبحاث وتجارب بياجيه مثلاً أن ذلك يعد أساساً لفهم مفاهيم العدد والقياس والهندسة.

7 - أن يدرس التلميذ مع الفئات بعد ذلك المنطق وقد تبين أهمية المنطق في فهم المواضيع المختلفة مثل التحليل الرياضي (التفاضل والتكامل) فقد اتضح أن عدم فهم أساسياته لطالب عمره 19 سنة يرجع إلى أنه غير متعود على طرق البرهنة ونفي التقارير.

8 - أن يقدم مبكراً كلما أمكن مفهوم الدالة Function ورموزها في الوقت الذي يمكن أخذ أمثلة من الحياة ومن الجبر ومن الهندسة ومن الفيزياء وغيرها ثم تقدم تركيبات التكافؤ وتركيبات الترتيب وتركيبات الجبر والتوبولوجي بحيث يمكن تدريسها لسن الثانية عشر في صورة حسية (محسوسة) وبصورة مجردة في سن متقدمة ويمكن في المرحلة الثانوية تقديم الهندسة الأفينية للمستوى والفراغ وجبر المتجهات ثم حاصل الضرب القياسي لتقليل الحسابات في الهندسة القياسية العادية.

9 - ينبغي الاهتمام بالأنشطة والاستعانة بوسائل الإيضاح المختلفة والأجهزة التعليمية الحديثة في تدريس الرياضيات من وسائل سمعية وبصرية كذلك يمكن الاستفادة من التكنولوجيا الحديثة في تدريس الرياضيات مثل الحاسوب والآلات الحاسبة والتلفزيون، ولقد ظهرت الحاجة إلى إنشاء معامل تدريس الرياضيات حيث يقوم التلاميذ باستخدام الوسائل التعليمية والأجهزة الحديثة التي تساعد على تعميق فهم الرياضيات وبيان قيمتها من الناحية التطبيقية والجمالية⁽⁴⁶⁾.

(2-6) مميزات طرائق التدريس المطلوبة

إن طرائق التدريس مطالبة بالعمل على :

1 - تنمية التفكير السليم لدى التلاميذ وهذه التنمية تحتاج إلى نوعية

من المدرسين الذين يستخدمون طرقاً في التدريس مناسبة لموضوع الدرس وتعتمد على خبراتهم في هذا المجال وكذلك استعداداً من التلاميذ لتقبل مثل هذه الطرائق، وفي مدارسنا نجد التلاميذ يقاومون ذلك لعلمهم أن هذا الأسلوب لا يأتي في الامتحان وإن لم تكن المقاومة من التلاميذ فتكون من زملاء المعلم من قبيل : انت مغلب نفسك معاهم - مهما عملت مش هينفع معاهم - النتيجة معروفة كلهم سينجحوا أو كلهم ...

2 - الاتجاه نحو الموضوعية بدلاً من الذاتية فالعلاقة بين المعلم والتلميذ يجب أن تأخذ طابع العلم من جهة التلميذ، أن المعلم ليس خالق المعرفة وليس هو مصدرها ومن جهة المعلم يجب أن لا يعتبر نفسه مالكا وعالمًا بالمعرفة كلها وأنه مطالب بالإجابة عن أي سؤال يسأله التلميذ، فالاعتذار بعدم معرفة الإجابة أفضل من تشويه الحقائق للتلميذ، لذلك نجد في مدارسنا أن المدرس يقيد نفسه بالشرح والمناقشة والتلميذ يجلس مستمعاً أو متفرجاً عليه.

3 - إن المواد الدراسية مواد مكملة لبعضها وكل مادة تستمد قوتها من ارتباطها بالمواد الأخرى، ولا زلنا نجد المدرس الذي يؤكد على أهمية مادته التي يقوم بتدريسها وأن الخبرات المدرسية والتربوية والحياة كلها قائمة على المنتج التعليمي لهذه المادة وهو في هذا يهدف إلى جعل التلاميذ يهتمون بدراسة مادته، ومن هنا فإن مفهوم التكامل بين المواد الدراسية والذي يجب أن يسلم به كل معلم ينعدم في المدارس⁽²⁴⁾.

4 - إن اختيار طريقة التدريس المناسبة يرتبط ارتباطاً مباشراً بأهداف التدريس، وتحديد الأهداف من المهام الصعبة على مدرسينا هذه الأيام بحجة أنهم ما داموا يستطيعوا أن يدرسوا فلا داعي للتحضير وبالتالي إضاعة الوقت في صياغة الأهداف السلوكية للدرس ولو طلب من أحدهم صياغة أهداف درسه لعجز عن ذلك لعدم فهمه أصلاً عن ما هو المقصود بالهدف.

5 - الاهتمام بميول واتجاهات التلاميذ ومشاركتهم الاجتماعية

والثقافية في الأنشطة التي تخدم البيئة ضرورة تربوية تحتمها النظرة إلى التلميذ على أنه كل متكامل جسمي وعقلي (معرفي) له انفعالاته وأحاسيسه وله استعداد خاص للتعلم، فالمجتمع الذي لا يشرك أبناءه في تأسيس حياة اجتماعية سليمة نجده ينحدر إلى سلالة المجتمعات المتخلفة وهذا التفاعل بين التلاميذ ومجتمعهم ضروري في العملية التعليمية⁽³²⁾.

6 - تراعي طرائق التدريس العمل على استخدام مواقف استكشافية للتلاميذ تزيد من فاعليتهم في التعلم ويجب السماح لمجموعات صغيرة بالعمل معاً لحل المشكلات مما يتيح الفرصة للتلميذ لكي يعبر عن نفسه من خلال هذه المجموعة والتي تضم مستويات معرفية مختلفة وكذلك استغلال هذه المجموعات في المنافسة في تمثيل الأدوار خاصة لمشاهير العلماء مما يتيح الفرص للتلاميذ للخروج من دائرة التمرکز حول الذات.

وفي مدارسنا فإن اتباع مثل هذه الطرائق يجعل بعض المدرسين يفكر في أن التلاميذ تستغل هذه الفرص للحديث في مجالات أخرى ويصبح على المعلم إسكات التلاميذ وتهديتهم.

7 - طرائق التدريس مطالبة بالعمل على تقديم المشكلات للمتعلمين في مستوى معرفي عال بدرجة طفيفة تكفي للوصول بالمتعلم إلى مرحلة عدم الاتزان والذي يستطيع التلميذ من خلال خبراته التكيف مع هذه المشكلات واكتساب خبرات جديدة وإذا ما حدث ذلك في مدارسنا، فالتلاميذ يشكون من عدم الفهم وأنهم لم يدرسوا مثل هذه المشكلات مما يدفع بالكثير من المعلمين إلى تقديم مشكلات في مستوى معرفي أقل لكي يكسب رضا التلاميذ⁽²⁴⁾.

8 - إن تقديم المادة العلمية بعيداً عن وجود الوسائط التعليمية المخطط لها والتي توضع بهدف خدمة الدرس وبحيث تكون جزءاً من خطة الدرس يجعل تقديم المادة في صورة جافة بعيداً عن المشوقات السمعية والبصرية، وبالرغم من معرفة المربين لأهمية الوسائط التعليمية واستخدامها كجزء من النشاط الصفّي أو

اللا صفي إلا أن الوسائل التعليمية في مدارسنا ما زالت قاصرة على استخدام السبورة والطباشير وبعض أنواع من الشرائح أو الخرائط إذا تذكر المعلم إحضارها، فالتدريس بالسينما أو الفيديو أو المعامل الصوتية والمكتبة والتجارب العملية والرحلات والنماذج والزيارات والإذاعة المدرسية وغيرها من الوسائط لا زالت بعيدة عن التطبيق الفعلي في كثير من المدارس.

9 - إن انتشار مجال التكنولوجيا العلمية ليعم كل مجالات الحياة أثرت على التربية بحيث لم يعد المدرس يواجه كل يوم عددًا محدودًا من التلاميذ ليعلمهم قدرًا من المعلومات، لقد أصبحت النظرة الحالية إلى أن المدرس لم يعد يستطيع أن يقوم ويلحق كل جديد من المعرفة، كما أن توسيع الخبرات لدى التلاميذ لا يمكن أن تتم عن طريق استخدام الطرق التقليدية في التدريس، فالكشف عن إمكانات واحتياجات واهتمامات كل تلميذ بحيث توجه نحوه إلى أقصى حد ممكن يحكمه في ذلك قدراته واستعداداته أصبح هدفًا أساسيًا للتربية، ولكي يتحقق ذلك في خضم أعداد التلاميذ الكبيرة ومع ما يتحمله المعلم من أعباء ومسئوليات أصبح لزامًا استخدام وسائل وتقنيات أخرى غير الكتاب والسبورة بل استغلال تكنولوجيا التعليم من تسجيلات صوتية مرئية وسينما وتلفزيون تعليمي وتعليم برنامجي لكي يساعد المدرس في عمله لتحقيق أهداف التربية⁽¹⁴⁾.

10 - طريقة التدريس يجب أن تكون مستمدة من واقع منهجي أو برنامج دراسي محدد ويجب أن يكون المقرر الدراسي منسجمًا مع العام الدراسي (الوعاء الزمني) ومع المستويات العمرية للتلاميذ ومراعية للفروق الفردية بينهم ومنسجمة مع الأنشطة المقدمة للتلاميذ، ولكننا نجد في مدارسنا طول المقرر الدراسي (كم المادة العلمية المقدمة للتلاميذ) وهذه تجعل المعلم مقيدًا في اختياره لطريقة التدريس التي يتبعها حرصًا منه على استكمال البرنامج الدراسي المقرر ولو كان ذلك على حساب فهم واستيعاب التلاميذ.

(7-2) بعض التطورات الحديثة في الرياضيات خلال الفترة (القرن السابع عشر - القرن العشرين)

يمكن تقسيم هذه الفترة التي تتمثل ما بين القرن السابع عشر وحتى القرن العشرين إلى ثلاث فترات :

الفترة الأولى (1600-1800)

تسمى عصر الحركة العلمية لأنها تميزت بنهضة الرياضيات عامة والحديثة خاصة، ومن أشهر رياضي هذه الفترة :

نيوتن (1642-1727)	ديكارت (1596-1650)
أويلر (1707-1773)	فيرمات (1601-1665)
لابلاس (1749-1827)	لوبيتال (1661-1704)
جاوس (1777-1855)	ليبنيز (1646-1716)
كوشي (1789-1857)	برنولي (1667-1748)
لوباتشفسكي (1793-1856)	رول (1652-1662)

وقد ظهرت في هذا العصر علوم حديثة لم تكن معروفة من قبل مثل:

1 - اللوغاريتمات والتي اكتشفت على يد بارون إسكتلندي هو «جون نابير» والذي قدمها كنصيحة تسمى اللوغاريتم والتي تسهل الحساب بواسطة إحلال عملية الجمع بدل الضرب.

2 - الهندسة التحليلية ويرجع الفضل في ابتكارها إلى العالم الفرنسي «ديكارت» والعالم «فيرمات» ولقد كانت الهندسة التحليلية بأسلوبها تمثل الطريقة المميزة للرياضيات التي ظهرت بعد ذلك، كما أن الهندسة التحليلية فتحت آفاقاً واسعة في مجال الهندسة نفسها وكانت من العوامل المساهمة في ظهور التفاضل والتكامل على يد «نيوتن» و«ليبنيز».

3 - الهندسة الإسقاطية والتي ساهم في ظهورها كل من ديسارجس "Desargues" وباسكال "Pascal"، ويعتبر باسكال أول من اخترع آلة الجمع وبالتالي أول من بدأ عصر الآلات الحاسبة، وقام «ليبنتز» بإدخال بعض التحسينات عليها بأن جعلها تجري عملية الضرب أيضاً.

4 - وضع ليبنتز أسس المنطق الرياضي حيث استخدام القوانين الرمزية وأسس قوانين الجمع والضرب المنطقي وكذلك النفي.

5 - ابتكر لوبيتال L'Hopital مشاكل $0/0$ (القسمة على صفر) وكذلك الصفر مقسوماً على الصفر وكذلك نظريته المشهورة في النهايات والمسماه باسمه.

6 - ظهور مفهوم الاتصال أو الاستمرار "Continuity" على يد نيوتن.

7 - تم اكتشاف التفاضل أو التكامل خاصة النظرية الثانية في التكامل.

8 - تم استخدام الأعداد السالبة.

الفترة الثانية (1800-1900)

هذا العصر تميز بالتقدم العلمي السريع في مجال الرياضيات وكذلك تطبيقاتها في العلوم الأخرى مثل الميكانيكا والجيوديسي (Geodesy) والفلك، وعلى ذلك نجد :

1 - نشطت حركة تعميم الحساب وامتداد النظام العددي من النظام العشري إلى الثنائي فالخماسي والثماني فالسادس عشر.

2 - ابتكر جاوس "Gauss" مفهوم التكافؤ العددي والمقياس (Modular) وكذلك تأكيد أهمية الأعداد المركبة واستعمالها في حل المعادلات من الثانية والثالثة فما فوق.

3 - ظهور حساب التفاضل والتكامل ساهم مساهمة فاعلة في حل كثير من مشكلات المساحات والحجوم.

4 - تم إدراك الطبيعة الشكلية البحتة المجردة للجبر فابتكر «هاملتن» الرباعيات، ونشر العالم جراسمان "H. G. Grassmann" (1809-1877) كتابًا يحتوي على بعض أنواع الجبر العامة الأخرى وكذلك على بعض الأنظمة المجردة النونية الأبعاد.

5 - ابتكر العالم الإنجليزي جي جي "A. Gaygey" (1821-1895) المصفوفات Matrices.

6 - تم اكتشاف الجبر البولي على يد بول "G. Bool" (1864-1916) وكذلك قوانين المنطق الرياضي وأشكال فن "Venn Diagrams" لتوضيح الجبر البولي والعمليات على المجموعات.

7 - ظهور مفهوم الثنائية (Duality) والذي أفاد فروع الرياضيات لأنه عمل على اقتصاد بعض البراهين للنظريات المتعلقة بمفاهيم متناظرة مثل النقطة والمستقيم وعمليات متناظرة مثل الجمع والضرب والاتحاد والتقاطع.

8 - ابتكر جيبس "W. Gibbs" تحليل المتجهات وظهرت أبحاث ودراسات خاصة بالنظام العددي ونظام الأعداد الحقيقية.

9 - ابتكر ديدكند "Dedekind" نظرية القطوع Cuts لتفسير الأعداد غير القياسية.

10 - تعمق فيراستراس "Veirstrass" في أبحاثه في الدوال التحليلية وبحث كانتور "G. Cantor" في الاستمرار الخطي واللا نهايات حتى توصل إلى ما يسمى بما وراء النهايات (Transfinite).

11 - ابتكر بيرس "Pierce" سنة 1820 جبر النسق الخطي.

12 - تم ابتكار النظريات المتعلقة بمفاهيم الفئات والمجموعات والهندسة اللا إقليدية والهندسة الريمانية وهندسة لوباتشفسكي والتوبولوجي والعلوم الإحصائية.

13 - ظهر التحليل الرياضي على يد «كوشي» و«مور»، والجدير بالذكر أن هذا المجال تعرض لمزيد من النقد وكان من نتيجة ذلك أن قامت محاولات لإدخال الحساب في التحليل الرياضي وظهور نظرية الأعداد الصماء على يد «ديكند».

الفترة الثالثة (القرن العشرين)

تميزت رياضيات هذه الفترة بزيادة الاهتمام بالتعميم والتجريد واستعمال المنطق الشكلي، كذلك من أهم ما تهتم به الرياضيات المعاصرة هو الدراسة العامة والدراسة التفصيلية للتركيب الرياضي Mathematical Structure حيث تتميز هذه التراكيب الرياضية بأنها تراكيب استنباطية أي مبنية على الأسلوب الافتراضي.

والجدير بالذكر أن فكرة التركيب نشأت نتيجة لتفاعل مفهوم العدد وابتكار أنواع مختلفة من الجبر المجرد وامتداد مفاهيم الفراغ نتيجة لخلق أنواع مختلفة من الهندسات المجردة وامتداد أساليب الاستدلال والتي يمكن التعبير عنها بأنها كانت بمثابة تحرر لعلوم الحساب والجبر والهندسة والمنطق وبالتالي نجد العودة للنظر في المعرفة الرياضية كلها ومحاولة بنائها على أساس أكثر شمولاً وتجريداً.

ويجب أن نشير إلى أن الأسلوب الافتراضي الاستنباطي هو أسلوب يعتمد على عناصر غير معرفة ومجموعة محدودة من المسلمات ونظريات تشتق من تلك المسلمات بالطرق الاستنباطية ومن التراكيب المشهورة مجموعة الأعداد الحقيقية وعمليتي الجمع والضرب والتي تسمى بالحقل وكذلك زمرة المصفوفات من الدرجة الثانية وعملية الجمع.

ولقد اعتبرت الرياضيات علم الحقائق النسبية بعد أن كان يطلق عليها اسم علم الحقائق المطلقة.

كما أن القرن العشرين تميز بانطلاقة واسعة في مجال التطبيق العملي للرياضيات فنجد أنه رغم التجريد ازدادت مجالات التطبيق في كافة العلوم الأخرى.

الموضوعات التي تميز بها القرن العشرين

1 - نظرية المعلومات Information theory والعمليات التي يدخل فيها عامل الصدفة واستراتيجية الألعاب وهي النظرية التي تسمى بنظرية الألعاب Game theory في العام (1944م) والبرمجة الخطية Linear programming (1948م)، ولقد ساعد هذا الموضوع في إيجاد طريقة دقيقة لإدارة المصانع الكبيرة والعمليات الحكومية.

2 - نظرية بحوث العمليات Operations research والتي استخدمت خلال الحرب العالمية الثانية حيث استخدم الأساليب العلمية في اتخاذ القرارات في المشاكل الاستراتيجية الهامة وطريقة أو نظرية بحوث العمليات تركز على ثلاثة مبادئ هي :

أ - يمكن تحويل المشاكل الإدارية إلى رموز تستخدم في المعادلات الرياضية.

ب - ليس من الضروري لمن يستخدم هذه الطريقة في اتخاذ القرارات أن يكون إدارياً قضى معظم حياته في حل المشاكل الإدارية فقد أصبح من الأمور العادية أن يتخذ كيميائي أو جيولوجي قرارات هامة في بعض المشاكل الإدارية باستخدام طريقة بحوث العمليات.

ج - يمكن تحقيق فوائد كبيرة من تعاون مجموعة من العلماء ينتمون إلى أنظمة سياسية واقتصادية مختلفة في حل المشاكل الإدارية التي تعرض عليهم.

ونتيجة لاستخدام بحوث العمليات أمكن تحقيق تقدم كبير في العمليات الصناعية من حيث تقليل تكاليف النقل بتحديد المواقع الصالحة لإقامة المخازن الرئيسية أو محطات التخزين الفرعية وكذلك تحديد كمية التشغيل المثالية للألات بحيث يمكن تحقيق أكبر فائدة ممكنة مع تقليل مقدار الوقت الضائع بين العمليات المختلفة⁽²²⁾.

3 - نظرية العينات Sampling theory والمشتقة من علم الإحصاء حيث يتم اختيار عينات عشوائية ممثلة للمجتمعات المأخوذ منها وبالتالي من خلال دراسة هذه العينات تكون مصداقية هذه النتائج في حدود 99% من الثقة أو 95% من الثقة.

4 - لقد كان للنظرية النسبية للعالم الرياضي والفيزيائي ألبرت اينشتاين والذي أوضح نسبية كل من الزمن والسرعة أن أصبحت النتائج المترتبة على ذلك أن ابتداء الإنسان يفكر في غزو الفضاء وانطلاق الصواريخ التي تحط أقماراً صناعية تدور في مدارات حول الأرض وحول الكواكب الأخرى لترسل لحظة بلحظة الصور والمعلومات عن هذه الأجرام السماوية، وكذلك مكنت هذه المخترعات من دراسة إمكانية وجود عناصر الحياة على بعض هذه الكواكب مثل المريخ والذي بينت المكتشفات الحديثة وجود ماء مجمد على سطحه.

5 - نظرية الاتصال Continuity theory والتي ساهمت في تقدم حساب التفاضل والتكامل والذي مكنا من إيجاد المساحة أسفل المنحنى وكذلك الحجم الدوراني لمساحة ما.

6 - علم مراقبة الإنتاج وهو مبني على كثير من النظريات والطرق الإحصائية ويفيد في المحافظة على جودة البضاعة المنتجة من غير أن تتأثر أو تفسد من الاختبار المباشر.

فلقد توصل العلماء إلى استخدام خريطة نقطة التعادل رياضياً حيث عن طريق المعادلات الرياضية أمكن التوصل إلى منحنى دخل المبيعات ومنحنى التكاليف

الكلية وخريطة نقطة التعادل تفيد في عمل الميزانية التقديرية للمؤسسة ومدى تأثير الأحجام المختلفة للإنتاج على كل عنصر من عناصر التكاليف أي عن طريق خريطة نقطة التعادل أمكن الحصول على معلومات على درجة كبيرة من القيمة تساعد على اتخاذ القرارات⁽²²⁾.

7 - في عام 1984 تم بحض حدسية ميرتينز Mertense Conjecture والمتعلقة بالدالة م (ن) المعرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة وكذلك إثبات حدسية بيبرباخ Bieberbach Conjecture والمتعلقة بدوال الأعداد العقدية (المركبة)⁽¹⁾، وسيتم شرح هذه الحدسية في فصل تطور الفكر الرياضي.

8 - تم إثبات فرضية ريمان Riemann والخاصة بإمكانية وجود عدد لا نهائي من أزواج الأعداد الأولية التوائم التي يبلغ الفرق بين العددين الأولين في كل منها اثنين مثل 5، 7 وكذلك 11، 13.

حيث أن هذه المسائل (حدسية ميرتينز وحدسية بيبرباخ وكذلك فرضية ريمان) باتت لمدة قرنين من الزمان لم يجرؤ أحد من العلماء أن يخوض غمار أي منها أو يحلها⁽¹⁶⁾.

الفصل الثالث

تطور الفكر الرياضي

The Development of Mathematical Thinking

(1-3) مقدمة

(2-3) العوامل التي ساعدت على تطور الفكر الرياضي

(3-3) تطور الفكر الرياضي لدى علماء المسلمين

(4-3) تطورات حديثة في الفكر الرياضي

الفصل الثالث تطور الفكر الرياضي

(1-3) مقدمة

تعتبر الرياضيات من أقدم العلوم التي عرفها الإنسان واستخدمها في حياته بصورة مباشرة خاصة عندما احتاج إلى المقاييس والعمليات في معاملاته ونشاطاته، وكأي شيء يبدأ بسيطاً ثم يتطور بمرور الزمن فكانت الفروع كالحساب والهندسة والجبر وحساب المثلثات والتوبولوجي والإحصاء والاحتمالات وغيرها والتي تمثل نتاج الفكر الرياضي.

(2-3) العوامل التي ساعدت على تطور الفكر الرياضي

لقد ارتبط تطور هذا الفكر الرياضي بتطور فروع الرياضيات المختلفة والتي نمت وتطورت بحسب الضرورة لدراسة العلوم الأخرى أو لفهم فلسفاتها، كذلك فإن هذا التطور في الفكر الرياضي ارتبط بـ :

أولاً : تعريف الرياضيات فإذا ما رجعنا إلى القرن الثامن عشر الميلادي نجد أن تعريف الرياضيات «العلم الذي تبحث موضوعاته في خواص المقدار من حيث حسابه أو قياسه» فكان هذا التعريف مناسباً لكم الرياضيات البسيط المكتشف آنذاك.

وعندما اكتشفت الهندسة الوصفية على يد جاسبار مونجييه "Mongé" بقيت أسرارها سرّاً من الأسرار حيث اعتبرت القيادة الفرنسية العليا أن الهندسة الوصفية هي سرها الحربي الخاص، ونجد فيما بعد أن هذا الاكتشاف ساعد على اكتشاف الهندسة الإسقاطية وهي ذلك الفرع من الرياضيات الذي لا يتعلق بالمقادير، وفيما بعد ونتيجة للتطور للهائل في الرياضيات خاصة في القرن التاسع عشر حيث ظهرت فروع كثيرة مثل نظرية المجموعات والتوبولوجي والمنطق الرمزي مما جعل النظر إلى المفهوم الكمي غير مهماً.

على أن هذا التطور لم يحدث بسهولة ويسر فلقد كانت هناك خلافات في الفكر والآراء وخلافات حول أسبقية الاكتشاف بين كبار علماء الرياضيات أمثال مجادلات نيوتن "Newton" وليبنيز "Libentiz" وكذلك المجادلة بين ديكارت "Descart" وفرمات "Fermat" من جهة وبين لاجندر "Lagender" وجاوس "Gaws" من جهة أخرى حتى أنه يذكر أن كارادان "Caradan" حصل على حل للمعادلة التكعيبية وأقسم أن يحتفظ بسريتها ولم يكتف بذلك بل ادعاه لنفسه.

إن كثيراً من الرياضيين كانوا يكتشفون شيئاً ويحاولون إيقاؤه سرّاً فنجد مثلاً عند الإغريق عندما تحولوا من الاهتمام بالصياغات النظرية والتأملات الفلسفية إلى الاهتمام بالرياضيات خاصة الأعداد غدت فلسفتهم تنص على أن كل شيء في الوجود عدد منطوق. فكانت اكتشافاتهم في الأعداد سرّاً حتى أصبحوا وجهاً لوجه أمام الأعداد الصماء (غير المنطقة) مما اضطرهم إلى محاولة الكشف عن هذه المشكلة الجديدة.

ونجد أن العلماء العرب والمسلمين وهم واضعوا أصول حساب اللوغاريتمات وجداوله والتي نسبها الغرب ظلماً إلى «جون نابير» ومعاصريه «بورجي وجوتز» في القرن السابع عشر.

ثانياً : لقد كان لنظريات إقليدس الأهمية في تطور المعمار الهندسي ولكن فيما بعد نجد أنه قامت محاولات عديدة لنقد هذه المسلمات ومحاولات لبرهناتها خاصة مسلمة التوازي لإقليدس، ولقد ساهم الكثير من علماء العرب والمسلمين أمثال الخوارزمي وابن الهيثم ونصير الدين الطوسي والذي قادت براهيته إلى استنتاج أن الزوايا الأربع للشكل الرباعي يكون مجموعها 360° ولقد ساهم برهان نصير الدين الطوسي في بناء هندسات لا إقليدية جديدة على يد كثير من العلماء أمثال فليكس كلاين Felix Klein ولوباتشفسكي وريمان، «ولقد كان منطقهم في عملية النقد الموجه لنظريات إقليدس أن معالجة إقليدس للهندسة لم تكن مصممة للكتابة كمقدمة في الهندسة تناسب طلاب المرحلة الثانوية بل كان

هدفه أن يضع تقويمًا للهندسة يكون على شكل مقدمة مناسبة أو إعداد لدراسات فلسفية عامة. لذلك نجد أن إقليدس قد أكد الصيغة المنطقية أكثر من البصيرة والحدس الرياضي، كما نجد أنه أهمل التطبيق العملي عامة واختار مادته بعناية في ضوء توجهه الفلسفي»⁽⁴³⁾.

كذلك يرى بعض العلماء أن إقليدس وضع هندسة للعلماء والفلاسفة وليس لتلاميذ المدارس حيث نرى الشكلية المنطقية ممثلة في البدء بالمسلمات والفروض والنظريات واستخدام النتيجة والبرهان في ترتيب منطقي فكانت نتيجة هذه الانتقادات أن تطلع العلماء في أفكارهم إلى بناء هندسات جديدة أو العمل على تعديل هذه الهندسة عن طريق بناء برنامج جديد مبني على المتجهات وفراغات المتجه في بعدين أو ثلاثة أبعاد أو أكثر والعمل على تنمية فهم وتذوق الطريقة الاستدلالية كطريقة للتفكير والبرهان الرياضي لدى الطلاب.

ثالثًا : بالنسبة للهندسة فلقد كانت بديهيات ومسلمات إقليدس المشهورة

تتربع على عرش الهندسة الإقليدية، من هذه البديهيات :

- 1 - الأشياء التي تساوي شيء تكون متساوية.
- 2 - إذا أضيفت متساويات إلى متساويات فالمجموع يكون متساويًا.
- 3 - إذا طرحنا متساويات من متساويات فالباقي يكون متساويًا.
- 4 - الأشياء التي تتطبق على بعضها تكون متساوية.
- 5 - الكل أكبر من الجزء.

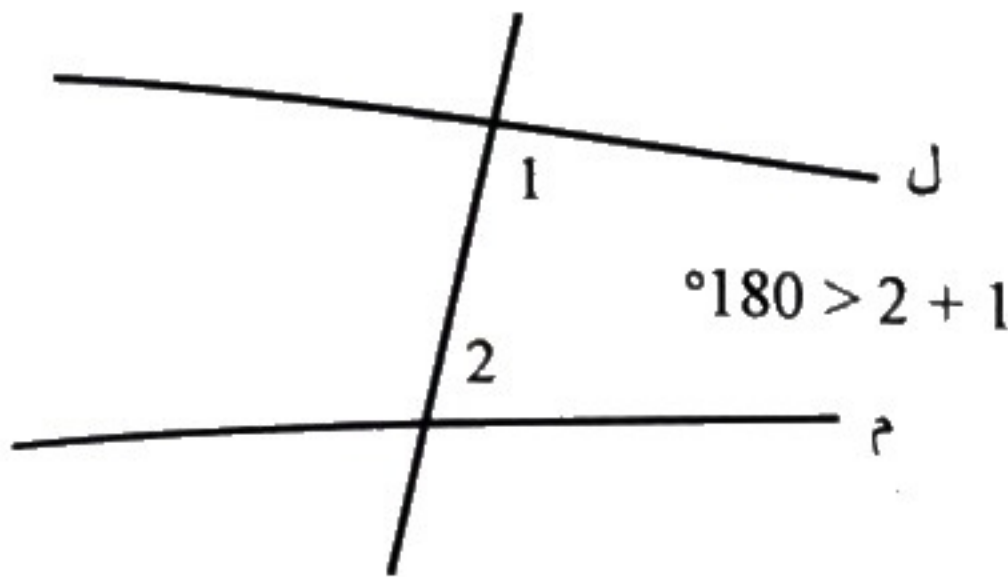
أما المسلمات فهي :

- 1 - يمكن رسم مستقيم من أي نقطة إلى أي نقطة أخرى.
- 2 - يمكن مد أي مستقيم ممدود على استقامته كما نشاء.
- 3 - يمكن رسم دائرة بتعيين أي نقطة كمركز لهذه الدائرة وبأخذ نصف قطر مساويًا لمستقيم محدود مرسوم من هذا المركز.
- 4 - الزوايا القائمة متساوية.

وتعتبر المسلمة الخامسة وهي مسلمة التوازي لإقليدس من أشهر هذه المسلمات حيث كانت مثالا للجدل وعدم الاقتناع من حيث وضعها كمسلمة يُسلم بصحتها، لذلك قام كثير من علماء الهندسة بمحاولات عديدة لإثبات صحتها من فروض سابقة كما لو كانت نظرية، ولقد ساهمت هذه المحاولات في الكشف عن وجود هندسات جديدة لا إقليدية ولنوضح ذلك.

مسلمة التوازي المشهورة هذه تنص على أنه :

«إذا قطع مستقيم مستقيمين بحيث يكون مجموع الزاويتين الداخليتين وفي جهة واحدة من القاطع أقل من قائمتين فإن هذين المستقيمين يتقاطعان إذا امتد في نفس جهة هاتين الزاويتين».



شكل (5)

ولقد أشار «بروكليس» في القرن الخامس الميلادي إلى وضع هذه المسلمة ووضعها مع النظريات ونجد «بلايفير» (1748-1819) يقترح وضع مسلمة بديلة لها سماها ببديهية بلايفير وتنص على:

«من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم واحد فقط موازيا لمستقيم معلوم»⁽⁴³⁾.

ولقد حاول رياضيون مسلمون أمثال عمر الخيام ونصير الدين الطوسي والإنجليزي "Wallas" برهنة هذه المسلمة لكن المحاولات هذه لم تؤد إلى نتيجة إلى أن جاء العالم الإيطالي الجنسية زخاري (1667-1713) والذي حاول البرهنة على صحة المسلمة باستخدام طريقة البرهان غير المباشر حيث تعتمد

هذه الطريقة على عدم قبول المسلمة أي اعتبار النتيجة خاطئة ثم افتراض فرض مناقض لهذه النتيجة أو يخالفها ومن ثم دراسة النتائج المترتبة على هذا الفرض، ولقد اعتمد «زخاري» على فروض ثلاث، هي فرض الزاوية القائمة وفرض الزاوية المنفرجة وفرض الزاوية الحادة وكانت نتيجة هذه المحاولات سلسلة من النظريات الاقليدية فقط.

ونجد محاولات العالم الألماني «لامبرت» (1728-1777) والذي اعتمد أيضا على الفروض الثلاث السابقة لزخاري وأيضا لم يتوصل «لامبرت» إلى البرهنة ولكنه توصل إلى مجموعة جديدة من النظريات.

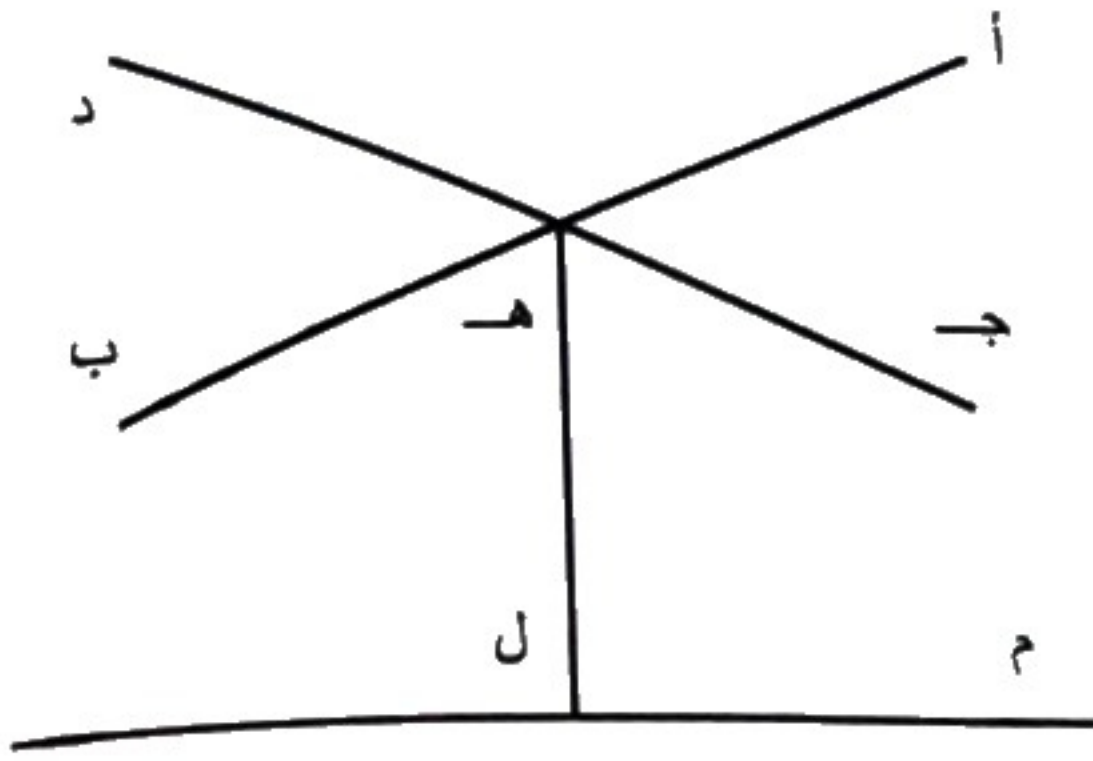
وتابع «لجندر» (1752-1833) محاولاته في البرهنة على صحة المسلمة بالاعتماد على فروض ثلاث هي تساوي قائمتين، أكبر من قائمتين، أقل من قائمتين، ولقد توصل إلى نظريتين جديدتين هما:

النظرية الأولى : مجموع الزوايا الثلاث للمثلث لا يمكن أن تكون أكبر من قائمتين.

النظرية الثانية : إذا وجد مثلثا واحدا مجموع زواياه يساوي قائمتين فإن مجموع زوايا كل المثلثات الأخرى تساوي قائمتين.

وهكذا أثريت النظريات غير الإقليدية ومن الأوائل الذين فكروا في هذه الهندسة الجديدة «جاوس» و«بوليا» و«لوباتشفسكي» ولقد سميت هندسة لوباتشفسكي وبوليا بالهندسة الزائدية والمسلمة التي تحل محل مسلمة التوازي الإقليدية في هذه الهندسة هي «من نقطة معلومة هـ خارجة عن مستقيم معلوم م يمكن رسم أكثر من مستقيم (في نفس مستوى هـ، م) ولا يقطع م».

واستنادا إلى هذه المسلمة مع المسلمات الأخرى لإقليدس يمكن إثبات أنه يوجد مستقيمان يمران بالنقطة هـ ولا يقطعان م ويصنعان زاويتين حادتين متساويتين مع العمود هـ ل النازل من هـ على المستقيم م.



شكل (6)

ونجد أيضاً في الهندسة الناقصية Elliptic لريمان والمبنية على فرض الزاوية المنفرجة وكذلك نجد الهندسة الاقينية والتي هي فرع من الهندسة الإسقاطية.

رابعاً : يعتبر التوبولوجي أحدث فروع الهندسة حيث يعد في صورته المعاصرة بالدرجة الأولى هندسة القرن العشرين ومع ذلك يمكن إرجاع نشأته إلى القرن التاسع عشر وتمتد إلى «أويلر» (1707-1773) ويرجعها البعض من المؤرخين إلى «ديكارت» (1596-1650) أي قبل اكتشاف أويلر بمائة عام.

ويسمى التوبولوجي هندسة تحليل الموضع أو المكان ويرجع هذا المصطلح إلى العالم الألماني «ليستنج» Listing (1808-1882) ويطلق أحياناً على هذا العلم للتبسيط هندسة شرائح المطاط Rubber sheet ولم يعد التوبولوجي علماً مقتصرًا على الهندسة بل تعداه إلى الفروع المختلفة في الرياضيات خاصة التحليل الرياضي.

ومن الأسماء الرائدة في مجال التوبولوجي بيانو "Piano"، بتي "Betti"، مور "Moore" وموبياس "Moebius" وبوانكاريه "Poincare" وهلبرت "Hilbert" وريمان "Riemann".

وبعد فالتطور والنمو في الرياضيات نجده تعدى الهندسات إلى الإحصاء والمنطق والجبر الحديث هذا الكم الهائل من المعارف الضرورية يجعلنا نوجه النظر إلى جعل التلاميذ والطلاب في المراحل التعليمية يدرسون رياضيات مكثفة ومعقدة مع ضرورة مراعاة سيكولوجية التعلم والتنظيم المنطقي والسيكولوجي للمادة الرياضية المقدمة وكذلك مراعاة الترابط والتكامل بين الموضوعات المقدمة لهؤلاء التلاميذ والطلاب.

ولقد كان لاكتشاف التفاضل والتكامل على يد كل من نيوتن (1642-1727) وليبنيز (1646-1716) وأويلر (1707-1773) مبعثاً جديداً نحو منطقية الرياضيات من جهة وكذلك مساعدته «أينشتاين» في حل معادلاته الخاصة بالنظرية النسبية والتي أدت فيما بعد إلى تفتيت الذرة والتقدم في أبحاث الفضاء.

خامساً : ساعد ظهور مدارس فكرية نادت بالمنطق على إضافة مصطلحات غير معرفة ومجموعات اختيارية من المسلمات وبالتالي بناء فرع جديد إلى الرياضيات هو المنطق الرياضي ولا نقصد بذلك المنطق الأرسطي والذي يعتمد على اللفظ بل المنطق الذي يعتمد على مجموعة من الرموز التي تمثل قضايا أو تقارير بسيطة أو مركبة تربطها علاقات رياضية أطلق عليه أيضاً اسم المنطق الرمزي تمييزاً عن المنطق الصوري.

والمعروف أن بداية المنطق كانت مع «أفلاطون» والذي كان يجد في الاستدلال الرياضي خير معين على البرهنة على وجود عالم الميتافيزيق (عالم المثل) ولقد كان من مآثر أفلاطون ضرورة دراسة الفيلسوف للرياضيات حتى أنه كتب على باب الأكاديمية التي يُدرس فيها أو التي يلتقي فيها تلامذته شعاراً كتب فيه «لا يدخل هنا إلا من كان رياضياً» ثم نجد أن المنطق تطور على يد تلميذ أفلاطون وهو أرسطو ومنطقه الصوري أو الشكلي والذي يعد نقطة البدء الحقيقية في أي مبحث منطقي فلقد كان أرسطو عالماً بالرياضيات السائدة في عصره ولذلك نجده بدأ يستقل بفكره عن فكر أستاذه أفلاطون وبدأ بتجريد فكره

من الرداء الرياضي وإن كان هناك استخدام للرياضيات غير مباشر ومن ثم بدأت تظهر نظرياته المنطقية ولقد قام أرسطو بالتمييز بين نوعين من القياس وهما القياس التام والقياسي الناقص علماً بأن القياس نوع من الاستدلال والذي يعتمد على مقدمات معينة يتبعها بالضرورة نتائج.

ولقد حاول المنطقة اعتبار الرياضيات من الممكن اشتقاقها من المنطق لذلك نجد ظهور فئة من العلماء يرفضون هذه الفكرة وكذلك ترفض فكرة الوجود الذاتي للمنطق وسمي أصحاب هذه المدرسة بالإلهاميين والذين يرون أن المنطق ليس علماً دائماً وإنما هو مجرد طريقة اشتقت من العلم لتسهيل دراسة هذا العلم ولقد كان من رأيهم أنه لماذا يعتمد المنطق على فكرة استبعاد الوسط وهي أن القضية إما أن تكون صادقة أو أن تكون كاذبة ولا يوجد ثالث لهما فيقول المنطقة رداً على ذلك أنه من الممكن أن لا تكون المعلومات كافية للحكم على القضية لذلك نجد أن بعض الرياضيين أدخل الوسط حيث عرض منطقاً جديداً غير المنطق الكلاسيكي ثنائي القيم هذا المنطق يسمح بثلاث قيم ثم إذا كان المنطق ثلاثي القيم فلماذا لا يكون رباعي القيم أو نوني القيم ؟ هل من سبب يوقفنا عند حد معين ؟.

في عام 1922 نشر العلامة البولندي «فان لاكشوز» Van Lakasiewicz أول بحث في المنطق ذي الثلاث قيم Three values logic وأعد الأمريكي أميل بوست "Emil Post" مقالة قلبت موازين القضايا العادية وكانت عن المنطق ذو النون من الأبعاد أي ن من القيم N- Values logic.

والجدير بالذكر أن المنطق الذي يدرس بالمدارس هو المنطق ذو البعدين (T, F) وبالتالي عندما يكون لدينا قضيتين p, q مثلاً فإنه يصبح لدينا أربعة احتمالات للصدق والكذب.

p	T	T	F	F
q	T	F	T	F

حيث F تعني كاذبة

T تعني صادقة

ويوضح بعض العلماء أن هذا المنطق الثنائي يكون مناسباً للأنظمة الرياضية المعروفة لدينا ولكنه قد لا يصلح كإجابات مرضية للعالم المحيط بنا، فعلى سبيل المثال إذا أخذنا قضايا الشئون الدولية (الاقتصاد، التغير الاجتماعي، العولمة، نقص المياه، التمييز العنصري،...) نجد أن مثل هذه الأمور لا توجد فيها أمور صادقة وأخرى كاذبة فقط ولكنها تحوي على أمور غير مقررّة (N) وهذه يمكن بحثها في المنطق الثلاثي حيث نجد ثلاثة إمكانات محتملة ومختلفة لكل قضية⁽⁴⁵⁾:

p	T	T	T	F	F	F	N	N	N
q	T	F	N	T	F	N	T	F	N
$P \wedge q$	T	F	N	F	F	N	N	N	N

ويتضح من الجدول أن التقرير إما أن يكون صادقاً (T) أو أن يكون كاذباً (F) أو غير مقرر (N).

والسطر الثالث يمثل تقريراً مركباً $p \wedge q$.

سادساً : لقد كان من أهم نتائج ميكانيكا نيوتن ذلك المبدأ المنسوب لجاليليو وهو مبدأ النسبية، وانطلاقاً من هذا المبدأ تكشف أمور علمية جديدة لم تكن ميكانيكا نيوتن تأخذها في الاعتبار، فمثلاً : يمكن أن نثبت بالتجربة أن مسار حجر مقذوف لأعلى من راكب لأحد القطارات عبارة عن خط مستقيم كما يبدو لهذا الراكب بينما يبدو ذلك المسار لأحد الواقفين على الرصيف والملاحظين لحركة هذا الحجر أنه يرسم مساراً مختلفاً (قطع مكافئ).

سابعاً : لقد كان للنظرية النسبية للعالم الرياضي والفيزيائي ألبرت أينشتاين (1880-1955) والذي أوضح نسبية الزمن ونسبية السرعة وأصبحت نسبية الزمن والنتائج الناجمة عنها هي المسماة بنظرية النسبية وهي تختلف عن مبدأ النسبية لجاليليو⁽⁵³⁾.

وكان من نتائج هذه النظرية أن ابتداء الإنسان يفكر في غزو الفضاء وانطلاق الصواريخ التي تحط أقماراً صناعية تدور في مدارات حول الأرض والشمس لترسل لحظة بلحظة الصور والمعلومات عن هذه الأجرام السماوية وصور حول الأرض تصور أماكن السحب والرياح وغيرها ونسمع الآن عن سفن فضاء يبقى رواد الفضاء (ملاحيا) أكثر من ستة شهور وهم يدورون حول الكواكب بغرض اكتشاف هذه الكواكب أو النجوم ودراسة إمكانية وجود المياه أو الأكسجين حولها.

ثامناً : الفكر الرياضي ديناميكي بطبيعته ويعتمد على التطورات والاكتشافات في مجال الرياضيات، وهذا التطور يكون من الناحيتين الوظيفية والفلسفية حيث يتم وصف جزء من العالم الذي نعيش فيه وتجهز كأدوات لغير الرياضيين لوصف أجزاء أخرى من هذا العالم وكذلك معالجة أساسيات الرياضيات من وجهة نظر فلسفية⁽⁴⁴⁾.

ونتيجة لهذه الجهود والمحاولات ظهرت فروع جديدة في الرياضيات مثل التوبولوجي أو هندسة رقائق المطاط Rubber Sheet Geometry ، كذلك ظهر حساب المثلثات والهندسة التحليلية حيث يتم الربط بين الهندسة والجبر وبالتالي الجانب التطبيقي والعملية للرياضيات.

وعندما تجسد الفكر الرياضي في حساب التكامل الذي ساهم مساهمة فاعلة في حل كثير من مشكلات المساحات والحجوم. واللوغاريتمات التي سهلت الكثير من العمليات الحسابية الكبرى مثل ضرب وقسمة الأعداد الكبيرة ولقد تطورت الجداول الرياضية وأصبحنا نراها مجسدة في الآلات الحاسبة والحواسيب الصغيرة والمصغرة والعلاقة هذه الحواسيب العملاقة التي تحسب وتجري ملايين الملايين من العمليات في أجزاء من الثانية هذه العمليات لا يستطيع العقل الإنساني الذي ابتدعها أن يقوم بها.

تاسعاً : لقد ساعدت الحرب العالمية الثانية على تنشيط الاختراعات

حيث برزت عدة مشاريع علمية ذات طابع عسكري، ومن أهم هذه المشاريع قيام فريق من المهندسين في جامعة بنسلفانيا بقيادة جون و موشلي John W. Mouchley وإيكبرت J. P. Eckbert بإنتاج حاسوب في كلية مور للهندسة الكهربائية وقد كان أول إنتاج لهذه المجموعة هو جهاز إنياك (ENIAC) وكان الهدف من هذا الجهاز أن يستعمل لحساب جداول إطلاق القذائف وكانت النتيجة جاهزة عام 1945 بعد شهرين من استسلام اليابان ويعد هذا أول جهاز حاسوب إلكتروني⁽¹⁹⁾.

والجدير بالذكر أن تطور الحواسيب بدأ منذ عام 1942 بصناعة العالم «بليز باسكال» آلة ميكانيكية تقوم بعملية الجمع والطرح ولقد كان لهذه الآلة دور كبير آنذاك إذ استخدمت بكفاءة في جمع الضرائب في فرنسا وبعدها بحوالي ثلاثين عامًا استطاع العالم الألماني لينتزر بناء آلة ميكانيكية متطورة عن آلة باسكال حيث تقوم بعملية الجمع والطرح والضرب والقسمة وإيجاد الجذر التربيعي.

بعد ذلك تطورت صناعة هذه الحواسيب من حيث الشكل والحجم والصفات والوظائف وتعددت لغات هذه الآلات أي الحواسيب وبرامجها ومجالاتها، ولقد أثرت هذه في الحياة عامة في مجالات الطب والتعليم والسياسة والاقتصاد والزراعة والصناعة ونظم المعلومات.

(3-3) تطور الفكر الرياضي لدى علماء المسلمين

لقد كان لتعاليم الدين الإسلامي السمحة وكذلك النهج الذي اتبعه الخلفاء المسلمين فيما بعد الدعوة المحمدية إلى تشجيع العلماء على البحث والتجريب، ولنستعرض فيما يلي بعض هذه المنجزات في مجال الرياضيات :
ففي مجال الأعداد نجد أن العرب نقلوا الأرقام الهندية وطوروها قليلاً فاستقل عرب المشرق في بغداد وأصبحت تكتب بعد تهذيبها بالصورة :

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ حيث (٠) تمثل الصفر

واستقل عرب المغرب بالرموز للأرقام فكانوا يكتبونها بالصورة :

0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 حيث (0) تمثل الصفر

ولقد نقل الغرب عن العرب في المغرب وأسبانيا هذه الأرقام ولا زال الغرب يطلقون عليها اسم الأرقام العربية.

ونجد الأسبان يسمون الأرقام بالخوازميات نسبة إلى الخوارزمي العالم الإسلامي الذي نقلوا عنه هذه الأرقام من كتابه «الحساب الهندي»، ومن الأدلة على أن الغرب أخذ عن العرب هذه الأرقام أنهم لا يزالون يكتبون الأرقام من اليمين إلى اليسار وحتى عمليات الجمع والطرح والضرب من اليمين إلى اليسار كما يقوم بها العرب.

وبالنسبة للصفر فكان يكتب عند الهنود على شكل دائرة وبداخلها نقطة فاستقل عرب المشرق بالنقطة واستقل عرب المغرب بالدائرة للتعبير عن الصفر (0).

ويؤكد «عمر فروخ» في كتابه «تاريخ العلوم عند العرب» أن الأرقام ظهرت مع الصفر مرسوماً نقطة في كتب عربية ألفت سنة 787م وبعدها بست سنوات ظهرت في الكتب الهندية.

واختيار العرب النقطة لتعبر عن الصفر لأن النقطة ذات أهمية كبيرة في الكتابة العربية ويعتبرها العرب المميز والضابط بين الحروف لذلك أعطوها معنى الوظيفة لتعبر عن الصفر مع الأعداد العربية فإذا وضعت النقطة مثلاً على يمين الواحد صار عشرة وإذا وضعت نقطتان على يمين الخمسة صارت خمسمائة وهكذا⁽²⁵⁾.

ويرجع اكتشاف الصفر إلى علماء المسلمين وفي مقدمتهم الخوارزمي الذي شرح موضع الصفر في عمليات الجمع والطرح ووضع النقطة فكان الصفر لا يحدث لبس بين الخانات.

والجدير بالذكر أن العرب عرفوا الأعداد الطبيعية عن طريق الإغريق ونجدهم أوجدوا مجموعة المتوالية الحسابية والهندسية وكذلك مجموع الأعداد الطبيعية ومجموع مربعاتها وأوجدوا أن المعادلة من الصورة مجموع مكعبين $(س^3 + ص^3)$ لا يمكن أن تكون مكعباً أي لا يمكن وضعها بالصورة $س^3 + ص^3 = ع^3$.

ولقد عرف العرب العدد التام والعدد الناقص والعدد الزائد، فالعدد التام هو الذي يساوي مجموع أجزائه الصحيحة (يقصد بالجزء الصحيح كسر من العدد بسطه الوحدة) فمثلاً الأجزاء الصحيحة للعدد 6 هي 1، 2، 3 أي $\frac{1}{6}$ ، $\frac{2}{6}$ ، $\frac{3}{6}$ والتي تصبح بالصورة $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$. العدد 4 لا يمثل جزءاً صحيحاً لأنها تساوي $\frac{2}{3}$ ولا يمكن أن تكون بالصورة $\frac{1}{7}$ حيث أ عدد صحيح موجب أكبر من الواحد.

وأجزاء العدد 28 هي 1، 2، 4، 7، 14 ومجموعها 28 أي تساوي العدد نفسه فالعدد 28 هو عدد تام.

بينما العدد 8 عدداً ناقصاً لأن أجزائه هي 1، 2، 4 وهذه مجموعها 7 أي أقل من العدد نفسه.

والعدد 12 عدداً زائداً لأن أجزائه هي 1، 2، 3، 4، 6 وهذه مجموعها 16 أي أكبر من العدد.

ولقد أوجد ثابت بن قره الحراني قانوناً لحساب مجموع الأجزاء الصحيحة لعدد ع مثلاً :

$$1 - ع = أ. ب. ج \quad \text{محلل إلى عوامله الأولية}$$

وأن $أ \neq ب \neq ج$ فإن مجموع الأجزاء الصحيحة يساوي

$$ج - ص = (أ + 1) (ب + 1) (ج + 1) - أ. ب. ج$$

مثال : ع = 42

$$7 \times 3 \times 2 = \text{ع}$$

$$7 \times 3 \times 2 - (7 + 1)(3 + 1)(2 + 1) = \text{جـ}$$

$$42 - 8 \times 4 \times 3 =$$

$$54 =$$

التوضيح : 42 : 1 ، 2 ، 3 ، 6 ، 7 ، 14 ، 21 ، 42 (الأجزاء الصحيحة)

$$54 = 21 + 14 + 7 + 6 + 3 + 2 + 1$$

2 - عندما يكون ع = أن ، أ عدد أولي

فإن مجموع الأجزاء الصحيحة

$$\text{جـ} = \text{ع} - \left(\frac{1 - 1^{\text{ع}}}{1 - 1} \right)$$

مثال : ع = 8 = 2³

$$\text{جـ} = \text{ع} - \left(\frac{1 - 2^4}{1 - 2} \right)$$

$$7 = 8 - 1$$

التوضيح : مجموع الأجزاء الصحيحة لعدد 8 هي :

$$7 = 4 + 2 + 1$$

3 - ع = أن. ب. ج. د ، أ ، ب ، ج ، د أعداد أولية

فإن مجموع الأجزاء الصحيحة

$$\text{جـ} = \text{ع} - \left(\frac{1 - 1^{\text{ع}}}{1 - 1} \right) \left(\frac{1 - 1^{\text{ب}}}{1 - 1} \right) \left(\frac{1 - 1^{\text{ج}}}{1 - 1} \right) \left(\frac{1 - 1^{\text{د}}}{1 - 1} \right)$$

مثال : لإيجاد مجموع الأجزاء الصحيحة للعدد 2520

ع = 2520 نحله إلى عوامله الأولية

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 =$$

$$\rightarrow \text{ص} = (2+1)(3+1)(5+1)(7+1) = 2520$$

$$= (2+1)(3+1)(5+1)(7+1) = 2520$$

$$= 2520 - 9360 =$$

$$= 6840$$

وعرف العرب العددان المتحابان وهما العددان اللذان مجموع الأجزاء الصحيحة لأيهما يساوي الآخر.

مثال على ذلك العددان 220، 284 عدنان متحابان.

ولقد أوجد ثابت بن قرة الحراني قانوناً لإيجاد الأعداد المتحابة وهو إنه إذا كان أ، ب، ج أعداداً أولية حيث :

$$أ = 2 \times 3 - 1$$

$$ب = 2 \times 3 - 1$$

$$ج = 2 \times 9 - 1 \text{ فإن } 2 \times أ، ب، 2 \text{ ج عدنان متحابان.}$$

وفي مجال الجبر والذي كان موجوداً عند قدماء المصريين وعند الهنود ومعروفاً لدى الإغريق ولكن الجبر كعلم لم يكن معروفاً لديهم بالطريقة التي عالجه بها الخوارزمي، فقد ألف الخوارزمي كتاب الجبر والمقابلة قاصداً بالجبر نقل الحدود من أحد طرفي المعادلة إلى الطرف الآخر وقاصداً بالمقابلة اختصار ما يجوز اختصاره بعد عملية الجبر ثم إيجاد القيمة.

وقد عني كتاب الجبر والمقابلة بحل معادلة الدرجة الثانية ورتبها وبوبها وصنفها وعالج كل صنف منها كذلك المباحث الخاصة بجذور المعادلة الموجبة وبجذور

المعادلة الصماء (يسمى الجذر أصم لأنه لم يسمع به كنسبة عدد صحيح إلى عدد صحيح).

ولقد كان من مآثر العرب في علم الجبر :
1 - وضع الخوارزمي نظرية الخطأين لإيجاد جذر المعادلة
أس + ب = صفر

حيث افترض لحلها قيمتين تخمينيتين للمجهول س هما هـ 1، هـ 2، كما افترض الخطأ في القيمتين هما و 1، و 2 فيكون حل المعادلة هو :

$$س = \frac{و 1 \cdot هـ 2 - و 2 \cdot هـ 1}{و 2 - و 1}$$

مثال : حل المعادلة :

$$2س - 3 = 0 \text{ باستخدام طريقة نظرية الخطأين.}$$

الحل : نفرض قيمتين تخمينيتين هما هـ 1 = 3، هـ 2 = 4

$$\text{الخطأ الأول} \quad و 1 = 3 - 3 \times 2 = 3$$

$$\text{الخطأ الثاني} \quad و 2 = 3 - 4 \times 2 = 5$$

$$س = \frac{و 1 \cdot هـ 2 - و 2 \cdot هـ 1}{و 2 - و 1}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 5 - 4 \times 3}{5 - 3} =$$

2 - أوجد غياث الدين الكاشي قانوناً لإيجاد مجموع عددين طبيعيين مرفوعين

إلى القوة الرابعة على الصورة :

$$(س + ص)^4 = س^4 + 4س^3ص + \frac{3 \times 4}{2}س^2ص^2 + \frac{2 \times 3 \times 4}{2 \times 3}سص^3 + ص^4$$

ويفترض علماء التاريخ الرياضي بأن هذا القانون لعب دوراً هاماً في

تطور علم الأعداد وهذا القانون أيضاً كان نواة لنظرية ذات الحدين.

3 - توصل الكرخي إلى إيجاد حل لمعادلة الدرجة الثانية بمجهول واحد وهو القانون المستخدم حالياً.

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4ج}}{2}$$

4 - برع الخيام في تصنيف وحل معادلات الدرجة الثالثة والرابعة، وحل عمر الخيام معادلة الدرجة الثانية على الصورة :

$$س^2 + ب س = ج \text{ هو } س = \sqrt{\frac{1}{4}ب^2 + ج} - \frac{1}{2}ب \text{ حيث } أ = 1$$

5 - صنف الخوارزمي المعادلات على الصور الست التالية :

- 1 - أ س² = ب س
- 2 - أ س² = ج
- 3 - ب س = ج
- 4 - أ س² + ب س = ج
- 5 - أ س² + ج = ب س
- 6 - ب س + ج = أ س²

ولقد حل الخوارزمي المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية في صورة هندسية كما في المثال التالي :

$$\text{لحل المعادلة } س^2 + 12 س = 45$$

- 1 - نرسم مربعاً أ ب جـ د طول ضلعه س (مساحته س²)
- 2 - نحيط به أربعة مستطيلات مساحة كل منها = $\frac{12}{4} س$ أي تساوي 3 س
- 3 - نكمل المربع الكبير برسم الأركان الأربعة وهي عبارة عن مربعات مساحة منها 9 .

$$\text{مساحة المربع الكبير} = س^2 + 4 \times 3 + 4 \times 9$$

$$= س^2 + 12س + 36$$

$$= 45 + 36$$

$$= 81$$

طول ضلع المربع الكبير = 9

$$9 = 3 + س + 3$$

$$س = 3 \text{ وهي حل المعادلة.}$$

3	س	3
		9
3س	س ²	
9		

6 - نسبة الخوارزمي إلى الجذور التخيلية فقال [واعلم أنك إذا نصفت الجذور وضربتها في مثلها فكان يبلغ ذلك أقل من الدراهم التي مع المال فالمسألة مستحيلة].

ويقصد بالمال معامل س² وبالجذر معامل س والدراهم الحد المطلق.

$$\text{ففي المعادلة } أس^2 + ب س + ج = 0$$

المال = أ ، الجذر = ب ، الدراهم = ج

$$\frac{ب}{2} \times \frac{ب}{2} > أ$$

$$\frac{ب^2}{4} > أ$$

$$ب^2 > 4 أ$$

$$ب^2 - 4 أ > 0$$

فالمسألة مستحيلة

هذا المقدار $b^2 - 4a$ هو ما يسمى بمميز المعادلة من الدرجة الثانية حاليًا والتي على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$.

7 - أوجد العرب الجذر التربيعي لعدد غير مجذور (ليس مربعًا كاملاً) أي إيجاد الجذر الأصم بالطريقة التالية :

إذا كان الجذر أصمًا فأسقط أقرب المجذورات إليه وأنسب الباقي إلى ضعف جذر المسقط مع الواحد.

فجذر المسقط مع حاصل النسبة هو جذر الأصم بالتقريب.

أي إذا كان المطلوب $\sqrt{A}$.

وكانت أقرب قيمة له هي b . (أقرب المجذورات) فإن القيمة $b + \frac{b^2 - A}{2b + 1}$

قيمة أكثر قربًا للعدد $\sqrt{A}$.

مثال :

$$\sqrt{3 + 16} = \sqrt{19}$$

$$a = 19, b = 4$$

$$\text{القيمة التقريبية} = 4 + \frac{16 - 19}{1 + 8} = 4 - \frac{3}{9}$$

$$= 4\frac{1}{3}$$

ولقد أوجد القلصادي الجذر التربيعي بطريقة أدق فاعتبر :

$$\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}} \approx \frac{b + \frac{1}{4}}{b + \frac{1}{4}} \quad (\approx \text{يساوي تقريبًا}).$$

$$\frac{b}{b + \frac{1}{2}} + 1 \approx$$

مثال :

$$\sqrt{3 + 16} = \sqrt{19}$$

$$1 - 4, 3 = 3$$

$$\frac{b}{2} + 1 = \sqrt[3]{b^2 + 1}$$

$$\frac{3}{8} + 4 = \sqrt[3]{19}$$

$$4.35 = \frac{24}{67} + 4 =$$

8 - أوجد العرب الجذر التكعيبي لعدد. فإذا كان ب أقرب جذر تكعيبي للمقدار أ فإن :

$$\frac{b - 1}{1 + 3b + 3b^2} + b = \sqrt[3]{7}$$

مثال :

$$\sqrt[3]{4 + 27} = \sqrt[3]{31}$$

$$3 = 3, 31 = 1$$

$$\frac{b - 1}{1 + 3b + 3b^2} + b = \sqrt[3]{7}$$

$$\frac{27 - 31}{1 + 9 + 27} + 3 = \sqrt[3]{31}$$

$$3.108 = \frac{4}{37} + 3 =$$

عاشراً : وفي مجال الهندسة نجد اهتمام العرب بالهندسة قبل الإسلام وزاد اهتمامهم بها بعد الإسلام والدليل على ذلك تلك الحضارات العربية القديمة في اليمن كالسدود القائمة مثل سد مأرب والقلاع القديمة وما عثر عليه من آثار هندسية في البتراء (الأردن) وفي تدمر (سوريا)⁽²⁵⁾.

ولقد عرّف ابن خلدون العالم المسلم علم الهندسة بأنه النظر في المقادير إما المتصلة مثل الخط والسطح والجسم وإما المنفصلة كالأعداد، وفيما يعرض لها من العوارض الذاتية مثل :

- أ - كل مثلث مجموع زواياه مثل قائمتين.
- ب - كل خطين متوازيين لا يلتقيان في جهة ولو خرجا إلى غير نهاية.
- ج - كل خطين متقاطعين فالزاويتان المتقابلتان فيهما متساويتان.
- د - إن أربعة مقادير متناسبة فإن ضرب الأول في الثالث يساوي ضرب الثاني في الرابع.

كذلك نجد أن الخوارزمي بحث في الهندسة وحساب المثلثات وعرّف المساحة وأوجد مساحة بعض السطوح المستوية والمجسمات ومساحة الدائرة والقطعة وأشار إلى قوانين الحجوم وعيّن قيمة النسبة التقريبية بدقة عالية.

كذلك قام كثير من العلماء العرب والمسلمين بالترجمة والتعليق على كتاب الأصول الهندسية لإقليدس مثل الحجاج بن يوسف بن مطر وأبو الريحان البيروني وابن الهيثم وثابت بن قره وعمر الخيام ونصير الدين الطوسي، ونجد أن الحسن بن الهيثم في كتابه شرح مصادرات إقليدس قد أثار العديد من المجادلات والمناقشات العلمية وأوضح أن المصادرات أو المسلمات أو البديهيات تنقسم إلى ثلاثة أقسام «المسلم به والمبين بالقياس والمحدد» فكل مسلم به يحتمل التشكك والطعن في حدوده⁽⁸⁾.

واستنتج عمر الخيام أن مجموع زوايا أي شكل رباعي تساوي 360° وأن مجموع زوايا أي مثلث تساوي 180° مع البرهان.

كذلك نجد أن نصير الدين الطوسي قام بمعالجة المسلمة الخامسة من مسلمات (مصادرات) إقليدس وقدم برهاناً جديداً على أن مجموع زوايا المثلث تساوي قائمتين.

ويعتبر المؤرخون للعلوم الرياضية أن برهان نصير الدين الطوسي يعتر نقطة تحول في تطور علم الهندسة وظهور الهندسة اللا إقليدية الجديدة، كذلك نجد فيلسوف العرب الكندي يتفق مع أفلاطون في أن الإنسان لا يكون فيلسوفاً من غير أن يُلم قبل ذلك بعلم الهندسة، ونجد أن الكندي أوضح أن البراهين أساس الرياضيات وكتب أيضاً في علم الهندسة الكروية ورسالة في الأشكال الكروية ورسالة في الهندسة المستوية.

ولقد قسم علماء العرب الهندسة إلى الفروع التالية :

- 1 - الهندسة المخصوصة بالأشكال الكروية وهذه تفيد في دراسة علم الفلك.
- 2 - المخروطات ويختص ذلك بالأجسام المخروطية والقطوع وهذه تفيد في الصناعات العلمية كالنجارة والبناء وصنع التماثيل.
- 3 - المساحة وهو يفيد في مسح الأرض وكذلك يستفاد من ذلك في تحديد قيمة الخراج على الأرض والبساتين.
- 4 - المناظرة (المناظر أو البصريات) وهو يختص بدراسة الإدراك البصري والخواص الهندسية في تحليل الشعاع وانعطافه وانكساره.

ولقد اهتم المسلمون في نوعين من الهندسة وهما :

(أ) الهندسة النظرية وهي التي نقلوها عن اليونانيين مع إضافات قليلة.

(ب) الهندسة التطبيقية أو العملية ونجدها في المباني والقصور⁽²⁶⁾.

وفي مجال حساب المثلثات فقد برع العلماء العرب والمسلمون في هذا المجال حيث قاموا بحساب جداول للجيب والظل على يد كل من أحمد بن عبد الله المروزي وكذلك الخوارزمي وبطليموس بغداد (البثاني) والذي أوجد جداول للظل عن طريق إيجاد قائم المزولة لارتفاع زوايا الشمس المقسمة إلى 360°.

ويرجع الفضل إلى العلماء العرب والمسلمون في إيجاد النسب المثلثية للزوايا عن طريق مفهوم دائرة الوحدة وهو ما يدرس حالياً ويرجع الفضل إلى

العرب في فصل علم حساب المثلثات عن علم الفلك وسموه بعلم الأنساب وذلك لأنه يحسب النسب بين أوجه الزوايا.

ومن أهم أعمالهم أيضاً أنهم ألغوا فكرة أن جيب الزاوية يساوي وتر ضعف القوس وهو ما كان يعتقدونه اليونانيون واعتبروا وتر القوس يمثل الجيب، كذلك نجدهم اهتموا بدراسة المثلثات الكروية ووضعوا القوانين الخاصة بذلك على يد البتاني.

ولقد حسب العرب طول محيط الكرة الأرضية وكانت القياسات قريبة جداً من القياسات الحالية.

ونجد أن ابن الزرقله وأبو الوفا قد أوجدوا جداول للجيب ومعكوس الجيب ولقد قام العالم جابر بن الأفلج الإشبيلي بتأليف كتاباً في الفلك من تسعة أجزاء تمثل مجموعة كبيرة من قوانين حساب المثلثات، ونجد أن ابن يونس وضع القانون الذي يمكن بواسطته تحويل عمليات الضرب إلى الجمع هو :

$$\text{جتا أ جتا ب} - \frac{1}{2} [\text{جتا (أ + ب)} + \text{جتا (أ - ب)}]$$

كذلك نجد أن الكاشي أضاف إلى علم الحساب كيفية تحويل الكسور الاعتيادية إلى كسور عشرية واستخدام الفاصلة التي يسرت الحساب لذلك وضع العرب أصول حساب اللوغاريتمات وجداوله.

من هنا نجد فضل العرب والمسلمين في بناء حضارة عربية إسلامية في كافة المجالات العلمية والأدبية وما كان ذلك ليتم لولا تشجيع تعاليم الدين الإسلامي والسنة المحمدية وتشجيع الخلفاء المسلمين للعلماء في هذه المجالات.

(3-4) تطورات حديثة في الفكر الرياضي

أولاً : لقد سجل عام 1984 انعطافة حادة في مسيرة الفكر الرياضي والرياضيات غيّرت بصورة كيفية من معالمها إذ توصل العلماء إلى حل ثلاث

مسائل معلقة ذات أهمية بالغة حيث أمكن حل ثلاثة من أبرز المسائل في علم الرياضيات في ذلك العام، إذ تم دحض حدسية ميرتنز Mertens Conjecture وكذلك إثبات حدسية بيبرباخ Bieberbach Conjecture وإثبات فرضية ريمان Riemann Hypothesis حيث أن هذه المسائل الثلاث باتت لمدة قرنين من الزمان لم يجرو أحد من العلماء أن يخوض غمار أي منها أو يحلها.

والمعلوم أن حدسية «ميرتنز» افترضت للمرة الأولى في عام 1885 من قبل الرياضي الفرنسي توماس ستيلتجز Thomas Stieltjes وطرحت مرة أخرى من قبل الألماني ميرتنز عام 1897 وهي تتعلق بالدالة $\zeta(s)$ (ن) المعرفة على الأعداد الصحيحة الموجبة (ن) بوضع $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (ن) مساوية للفرق ما بين عدد الأعداد الأقل من n والتي تشكل حواصل ضرب عدد زوجي من الأعداد الأولية المتميزة وعدد الأعداد التي تشكل حواصل ضرب عدد فردي من الأعداد الأولية المتميزة، أما الأعداد التي تقبل القسمة على مربع أي من الأعداد الأولية فيتم إهمالها في حساب الدالة $\zeta(s)$ (ن).

أما حدسية بيبرباخ فتعني بدوال للأعداد المركبة أو العقدية Complex Numbers وهي تلك الدوال التي تحتوي على الجذر التربيعي للعدد (-1) وأكثر هذه الدوال أهمية واستخداماً لدى علماء الرياضيات هي تلك التي يمكن أن يعبر عنها بمجموع متسلسلة لا نهائية، ومن الأمثلة على هذه الدوال الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية والدالتان المثلثيتان للجيب وجيب التمام حيث الأعداد ليست الأعداد الحقيقية بل أعداداً مركبة.

وفي عام 1916 كتب الرياضي الألماني «لودفيغ بيبرباخ» بحثاً برهن فيه أنه في حال دالة مركبة على النحو : $m(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$

إذا لم تكن هناك قيمتان z متماثلتان من حيث القيمة المطلقة ل z تعطيان القيمة ذاتها ل $m(z)$ فإن القيمة المطلقة للمعامل a_2 هي على الأكثر 2 (مع افتراض أن $a_1 = 1$)، ولقد تكهن بيبرباخ أن المعامل a_n لـ z^n لجميع قيم n

مساو على الأكثر لـ n في قيمته المطلقة⁽¹⁵⁾. ولقد اشتغل العديد من علماء الرياضيات على حدسية بيبرباخ وأحرزوا تقدماً ملحوظاً في هذا المجال أمثال العالم الفرنسي جان ديودونيه Jean Dieudonne حيث برهن صحة الحدسية للحالة الخاصة عندما تكون المعاملات a_n أعداداً حقيقية وكذلك العالمان شارزنسكي Charzynski وشيفر Schiffer.

أما فرضية ريمان فكانت تمثل الإنجاز الرائع فقد بدأت قصتها عندما لاحظ ريمان في إحدى مقالاته المتعلقة بموضوع توزيع الأعداد الأولية 2، 3، 5، 7، 11، 13، ... أنه كلما واصلنا هذه العملية قل تواتر (وتيرة) الأعداد الأولية وأن هذه الكيفية التي يقل بها هذا التواتر ليست منتظمة والرياضيون ومنذ أن أثبت إقليدس أنه يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الأولية يريدون رؤية نوع من النظام في الفوضى الظاهرية لتواتر الأعداد الأولية.

ولقد طرح سؤال يقول هل هناك عدد لا نهائي من أزواج الأعداد الأولية التوأم أي تلك الأزواج التي يبلغ الفرق بين العددين الأوليين في كل منها اثنين (2) مثل 5، 7 وكذلك 11، 13 ولقد وضعت مكافأة قدرها 25000 دولار لمن يحلها.

ولقد حاول الكثير من العلماء مثل جاوس Gauss وجاك هدمارد Jaques Hadamard وشارل بواسان Poussin وكذلك أويلر Euler لحل هذه المعضلة من قائمة التحديات المهمة التي واجهت علماء الرياضيات في القرن العشرين والتي وضعها الرياضي هيلبرت David Hilbert عام 1900.

وفي عام 1984 وفي جامعة باريس تم حل هذه المعضلة على يد العالم الرياضي الياباني هايديا ماتسوموتو Hidea Matsumoto ، وأخيراً بقي أن نتذكر أن النظرية الأخيرة لفيرما Fermat فقد تم إحراز تقدم لها عام 1983 على يد العالم الألماني الشاب فالتينغز Faltings والذي أثبت أنه لأي $n < 2$ فإن المعادلة $x^n + y^n = z^n$ يمكن أن يكون لها على الأكثر عدد محدود من حلول الأعداد الصحيحة لقيم s ، r ، e .

ثانيًا : يمكن القول أن العلوم الرياضية نوع من الدراسات التي تتجه اتجاهًا بنائيًا حيث تتدرج من السهل إلى الأكثر صعوبة فمثلاً تبدأ بالأرقام وتتدرج إلى الأعداد ثم الكسور وتبدأ بعمليات بسيطة مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة وتتدرج إلى المعادلات وحلولها والأعداد الحقيقية والأعداد المركبة والأعداد الثلاثية والرابعة وتزداد العمليات صعوبة وتحتاج إلى فكر أعمق بحيث لا يكون هناك تناقض أو تعارض بين أفرع هذه العلوم وقد تبقى بعض المشكلات دون حل إلى أن يأتي الوقت الذي تظهر فيه حلول لهذه المشكلات، فالفكر الرياضي فكر مستمر ومتجدد.

والعلوم الرياضية تتجه بالتفكير اتجاهًا استنباطيًا يصل إلى التجريد والتعميم والاستنباط من جهة وتتجه بالتفكير اتجاهًا تركيبياً أيضاً عن طريق إيجاد علاقات بين العناصر وكذلك يتجه التفكير اتجاهًا تحليليًا يكشف عن طرق حل المشكلات وإدراك وظائف العناصر المختلفة على أن هذه الاتجاهات راجعة إلى أن طبيعة العقل البشري هي البحث والتفكير واختراع المعلومات الرياضية لكي تصبح أداة طيعة في يده تمهد له كافة السبل إلى التقدم فيقوم باستغلالها في تنمية تفكيره وبالتالي يرقى هذا التفكير وهذا بدوره يمهد الظروف نحو تقدم جديد وثقة تدفع التفكير إلى مستوى أعلى فيبحث ويخترع وهكذا تدور حلقات الاتصال بين تطور التفكير الإنساني وبين تطور العلوم الرياضية بحيث يصاحبها الرقي والتقدم في كل دورة ويتبعها التقدم خطوة بخطوة.

فمنذ أكثر من ثلاثة آلاف عام بنى المفكرون العظام في الهند والصين واليابان واليونان ومصر صرح الرياضيات العظيم، ويضاف إلى هذا الصرح مئات الآلاف من الصفحات في الرياضيات الحديثة الخلاقة كل عام وإذا ما تذكرنا أن عدد المجالات التي تعنى بالبحث في علم الرياضيات حوالي 2750 مجلة⁽¹⁵⁾ وإذا ما قدرنا أن المحتوى السنوي لكل من هذه المجالات هو ما معدله 700 صفحة فإننا سرعان ما نستنتج أن ما ينشر في مجال البحوث الرياضية

يصل إلى 1.650.000 صفحة سنوياً وبعبارة أخرى فلو وضعنا هذه الصفحات بحيث تكون نهاية إحداها عند بداية الأخرى لامتدت إلى مسافة تقرب من ثلاثمائة ميل، وفي إحصائية أخرى يقدر عدد علماء الرياضيات المحترفين في العالم بمائة ألف فلو صُفوا بحيث يكون رأس أحدهم عند قدمي الآخر لامتدوا إلى مسافة مائة ميل، نستنتج من ذلك أن معدل ما ينتجه الرياضي النمطي سنوياً من بحوث منشورة يعدل طول ثلاثة أمثال طول الرياضي نفسه وبتوفر هذا الخضم من العلماء والمال يمكننا أن نتوقع خطوات كبيرة إلى الأمام.

ثالثاً : أن تطور المجتمع وتقدمه يرتبط دائماً بتطور الفكر الرياضي والدليل على ذلك ما قامت به فرنسا عندما تحررت من النازية بأن عقد الرئيس الفرنسي شارل ديغول اجتماعاً مع مدراء المدارس ورؤساء الجامعات وحثهم على التعديل السريع في مناهج الرياضيات لتصل إلى مستوى المدارس والجامعات في ألمانيا (والتي كانت متقدمة آنذاك) وهكذا نجد ما وصلت إليه فرنسا في عصرنا الحاضر.

ونفس الأسلوب اتبعته أمريكا في عام 1957 عندما أطلق الروس أول قمر صناعي لهم فقامت أمريكا بتجديد مناهج الرياضيات في مدارسها وجامعاتها وكان من نتيجة ذلك تفوق علمي أمريكي على العالم.

وعلماء الرياضيات يدخلون دائماً تعديلات أساسية كثيرة على الرياضيات في مجالي المحتوى وطرق التدريس بحيث لا يقف تركيزها على خدمة علوم الفيزياء أو الهندسة بل تتعدى ذلك إلى الفروع الأخرى مثل العلوم البيولوجية والجيولوجية والاجتماعية والفلسفية والسيكولوجية والعسكرية والتربوية والنواحي التقنية مما دعى كثير من العلماء إلى الاهتمام بالبحث والعمل على تطوير الرياضيات والاهتمام بتنمية التفكير الرياضي وبمناهج الرياضيات وطرق تدريسها.

الفصل الرابع

المفاهيم Concepts

- (1-4) مقدمة
- (2-4) المفهوم
- (3-4) تكوين المفهوم
- (4-4) تصنيفات أخرى للمفاهيم
- (5-4) تصنيفات المفاهيم حسب وظيفتها
- (6-4) أهمية استخدام المفاهيم
- (7-4) استراتيجيات تدريس المفاهيم
- (8-4) درس نموذجي في تقديم المفهوم

الفصل الرابع المفاهيم

(1-4) مقدمة

لعل أهم ما يميز الرياضيات الحديثة عن غيرها من العلوم أنها ليست مجرد عمليات روتينية أو مهارات بل هي أبنية محكمة يتصل بعضها ببعض اتصالاً وثيقاً مكونة في النهاية بنياناً متكاملًا واللبنات الأساسية في هذا البناء هي المفاهيم، فعند دخول التلميذ المدرسة يقوم بدراسة مفردات أو رموز معينة مثل الأعداد، الطول، الجمع، الطرح، القسمة، الترتيب وتبدأ عملية التعلم لدى التلميذ عن طريق التعرف على هذه المعاني أو المفردات أو الرموز الجديدة بالنسبة له ومن ثم عملية تمييزها عن غيرها بحيث يصبح قادرًا على التمييز بين النقطة والمستقيم وبين المثلث والمربع والمستطيل وغيرها من المصطلحات. وعندما يقوم المعلم بتدريس مثل هذه الكلمات أو المصطلحات أو المعاني فإنه يقوم بتدريس المفاهيم.

[وتظهر أهمية تدريس المفاهيم في أن التعميمات والمهارات الرياضية تعتمد اعتمادًا كبيرًا على المفاهيم في تكوينها واستيعابها واكتسابها وتحويلها، كذلك فإن تقدم التلميذ وتحصيله الدراسي في الرياضيات يعتمد اعتمادًا كبيرًا على مدى ما لديه من مفاهيم رياضية مكتسبة.]

والمفاهيم تمكن الشخص من التعلم والتمييز وتسمية الأشياء بمسمياتها المناسبة بحيث يستطيع نقل أفكاره إلى الآخرين⁽¹³⁾.

لذلك كان لا بد من التعرف على أهمية المفاهيم وأنواعها وطرق تدريسها بما يحقق أهداف تدريس الرياضيات وأن يدرك الطالب المعلم هذه الكائنات الرياضية ويكون ملماً بأصول تدريسها.

(2-4) المفهوم

الحقيقة أنه لا يوجد تعريف جامع أو متفق عليه للمفهوم ولكن ذلك لا يمنع من وجود تعريفات مختلفة للمفهوم تحقق الهدف منها.

تعريف هندرسون⁽⁶⁷⁾

1 - «المفهوم هو الصفة المجردة المشتركة بين جميع أمثلة ذلك المفهوم» أي أن المفهوم يوجد حيث يوجد شيئان أو أكثر متميزان أو حيثما توجد حوادث مصنفة معاً ومنفصلة عن الأشياء الأخرى على أساس بعض الملامح المشتركة بينها أو وجود الخاصية المشتركة لها، ويمكن وضع الحوادث أو الأشياء ضمن فصيلة واحدة على أساس صفاتها المعيارية وتعطى هذه الفصيلة اسماً هو في العادة مصطلح المفهوم.

فمجموعة الأشكال التي هي عبارة عن ثلاثة أضلاع متقاطعة مثلثي مثلثي تتسبب إلى مفهوم المثلث ولكن كون هذا المثلث صغيراً أو كبيراً، متساوي الأضلاع، حاد الزوايا، مختلف الأضلاع، مثلث من خشب أو مثلث من حديد هذه القيم لا تبعدنا عن مفهوم المثلث لهذه الأشكال فالصفة المجردة هي وجود ثلاثة أضلاع بينما إذا كان هذا الشكل يحوي أربعة أضلاع، فالمفهوم يتحول إلى الشكل الرباعي، ولا يهمنا إن كان هذا الشكل مربعاً أو معيناً أو مستطيلاً فهذه تصنيفات للشكل الرباعي وهكذا.

2 - المفهوم الرياضي قاعدة لاتخاذ قرار أو حكم عندما تطبق على مواصفات أو خصائص شيء ما نستطيع أن نحدد فيما إذا كان بالإمكان إعطاء التسمية (المصطلح) لذلك الشيء أو عدم إعطائه هذه التسمية⁽³⁴⁾، فالخصائص التي تميز المستطيل مثلاً هي التساوي في الأضلاع المتقابلة وكذلك الزوايا الأربع متساوية وقياس كل منها (90°).

والخصائص التي تميز الشكل السداسي المنتظم هي وجود ستة قطع مستقيمة

متساوية في الطول ومتقاطعة متنى متنى وكذلك تكون قياسات زواياه متساوية قياس كل منها (120°).

3 - المفهوم زوج مرتب ذي بعدين، الأول يمثل العبارة التي تحدد المفهوم أو الاسم (المصطلح) الذي يطلق عليه المفهوم والمسقط الثاني يمثل القاعدة التي تستخدم في تحديد أو استعمال هذه العبارة.

فعندما يكون المسقط الأول أي المصطلح أو المفهوم هو القطع الناقص فيكون المسقط الثاني «المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدار ثابت».

4 - المفهوم الرياضي تجريد ذهني لخصائص مشتركة لمجموعة من الظواهر أو الخبرات أو الأشياء حيث تعزل هذه الخاصية مما يحيط بها في أي من المواقف المعينة وتعطى اسماً يعبر عنه بلفظ أو رمز، فخاصية الاثنية مثلاً ما هي إلا تجريد عقلي للخاصية المشتركة الموجودة في مواقف مثل العينين أو القدمين أو الذراعين أو الزوجين أو الأبوين.. والتي نسميها اثنان ونعبر عنها بنفس اللفظة أو بالرمز «2» ومع تجريد هذه الخاصية فإن المفهوم «2» لا شأن له بالعينين أو القدمين أو الذراعين أو أي من المواقف الخاصة التي من بين خواصها أنها اثنان (51).

ولما كان المفهوم تجريد ذهني لخصائص مشتركة لمجموعة من الأشياء فإنه يجب التمييز بين المفهوم كتكوين عقلي مجرد أي داخل التصورات العقلية وبين المفهوم كتكوين محسوس مثل الكرسي أو الكتاب أو القلم.. فمفهوم الكرسي أو الكرسيه هو تجريد للأشياء التي تتميز بوجود قاعدة وثلاثة أو أربع أرجل وقد يكون الكرسي من الخشب أو الجلد أو الحديد وقد يكون مريحاً أو غير مريح.

تعريف ميريل

المفهوم مجموعة من الأشياء المدركة بالحواس أو مجموعة من الأحداث

التي يمكن تصنيفها مع بعضها البعض على أساس من الخصائص المشتركة والمميزة ويمكن أن يشار إليها باسم أو رمز خاص⁽⁷³⁾.

إلا أنه ينبغي أن نوضح أنه يوجد الكثير من المفاهيم غير المدركة بالحواس، فمثلاً مفهوم الحلقة ring أو الحقل Field أو الاتحاد Union أو التقاطع Intersection وغيرها من المفاهيم غير مدركة بالحواس.

تعريف هيرنج

المفاهيم الرياضية هي تلك الأشياء الرياضية التي يمكن أن نجد لها نموذجاً طبيعياً أو نموذجاً رياضياً يمكن أن يمثل طبيعياً⁽²⁰⁾، فعندما نتحدث عن مفهوم المجموعة وذلك لأنه يمكن إيجاد نموذجاً يمثله في العالم الخارجي مثل تجمع من الأطفال أو تجمع من الألعاب، فالعدد ثلاثة كمفهوم يمكن أن يمثل له نموذجاً عبارة عن ثلاثة أصابع أو ثلاثة أقلام أو ثلاث كرات.

والدالة مفهوم لأنه يمكن عمل نموذجاً طبيعياً لها حيث يمكن تمثيلها على ورقة رسم بياني.

ويكون النموذج الرياضي عندما يتم دمج أو ربط المفاهيم المستمدة من خبرتنا الحسية الحركية بالعالم الخارجي بعلاقات رياضية.

(3-4) تكوين المفهوم

لما كان المفهوم هو ما يتكون لدى الفرد من معاني أو كلمات أو فهم يرتبط بكلمات أو عبارات أو عمليات معينة (كتاب، شجرة، قلم، دالة، علاقة، فئة، تقاطع، اتحاد، مجموع، طرح، ضرب،) فإن مقررات الرياضيات تحتوي على الكثير من المفاهيم الرياضية والتي تتراكم لدى المتعلم عاماً بعد عام، هذه الكلمات أو العبارات (المفاهيم) لكي تكون أدوات فعالة للاتصال والفكر ينبغي أن تعني شيئاً معيناً بالنسبة للفرد أو الأفراد والمعنى الذي تحمله كل كلمة

أو عبارة معينة عن شيء معين تكون لدى الفرد أو الأفراد مفهوماً عن هذا الشيء⁽⁵⁾.

ولما كانت الكلمات عبارة عن مجردات وبالتالي فإنها تحمل من المعاني والفهم بالنسبة للفرد بقدر ما يتوفر لديه من العاملين الأساسيين التاليين :

أ - مستوى النضج

هذا العامل يحدث نتيجة للتكوين الوراثي للفرد ولا يحتاج إلى تمرين أو تدريب أو ملاحظة، فالمشي عند الأطفال نتيجة نضج وليس نتيجة لتعلم، فالطفل يمشي نتيجة لبلوغ جهازه العضلي وجهازه العصبي درجة من النضج، وكذلك هناك مجموعة من القدرات في مجال النمو العقلي والانفعالي تنمو بتقدم الطفل في العمر⁽²¹⁾.

لذلك فالأفراد يتميزون من حيث مستوى النضج وبالتالي انعكاس ذلك على اكتسابهم للمفاهيم.

ب - الخبرات المتوفرة

فالأفراد يختلفون فيما بينهم من حيث الخبرة المتوفرة لديهم، فالكلمة الواحدة لا تعني لجميع الأفراد معنى واحد أو بعبارة أخرى يختلف الأفراد في مستويات الإدراك والفهم والمعنى، وعلى ذلك فالمفهوم ليس شيئاً ثابتاً تماماً في ذاته منذ بداية تعلمه وإنما هو ينمو من خلال نضج الأفراد ونمو خبراتهم.

وتنمو المفاهيم وفق نظام تتابعي وهذا المبدأ (النظام التتابعي) متبع في تدريس الرياضيات والعلوم والاجتماعيات وذلك بهدف اكتساب المعرفة.

ولقد أوضحت الكثير من الدراسات أن بعض المفاهيم تنمو مبكراً وبعضها يبدأ في الظهور متأخراً مع نمو مفاجئ سريع وبعضها ينمو بالتدريج خلال فترة زمنية طويلة نسبياً.

على أنه يبقى أن مستوى الفهم عند طفل معين يتناسب مع عدد الخبرات التي مر بها وأنواعها فيما يتصل بهذا المفهوم⁽¹³⁾.

والخبرات التي تمثل هذا المفهوم تعتبر أمثلة إيجابية له أما الخبرات التي لا تمثلها فهي أمثلة سالبة لهذا المفهوم.

ولتكوين المفهوم يجب أن تتوافر لدى الفرد سلسلة من الخبرات المتشابهة في جانب أو أكثر، كذلك يجب أن يسبق سلسلة الخبرات التي تحتوي المفهوم أو يلحق بها أو يتخللها أمثلة سلبية أيضاً لضمان تعلم هذا المفهوم على نحو سليم.

وعلى ذلك يمكن أن نخلص إلى أن تكوين المفهوم لدى الفرد يعتمد على:

- 1 - مستوى نضج الفرد.
- 2 - تقسيم الأشياء وفق التشابهات.
- 3 - تقسيم الأشياء وفق الاختلافات.
- 4 - التمييز بين الأشياء من حيث الاختلافات والتشابهات⁽⁴⁵⁾.

فعلى سبيل المثال إذا أردنا أن نعلم التلميذ مفهوم اتصال دالة عند نقطة معينة يجب أن نوضح له بالأمثلة المختلفة الموجبة والسالبة لهذا المفهوم فنقدم له أمثلة لدوال متصلة عند نقطة وأمثلة لدوال غير متصلة (منفصلة) عند نقطة وكذلك أمثلة للمقارنة أو التمييز بين دوال من حيث اتصالها أو عدم اتصالها عند نقطة معطاة مع مراعاة أن تقديم مثل هذا المفهوم للتلميذ يجب أن يكون متفقاً مع مستوى نضجه العقلي لتقبل مثل هذه المفاهيم.

وعندما يستطيع التلميذ أن يكتب تعريفاً سليماً لاتصال دالة عند نقطة وأن يحدد ويميز الدوال المتصلة عن غيرها من الدوال غير المتصلة عند هذه النقطة وعندما يتمكن التلميذ من التعرف على الدوال المتصلة من خلال الصورة العامة لها كما وأنه يستطيع أن يحدد القيمة أو القيم التي تجعل دالة ما متصلة عند نقطة ما فإننا نقول أن مفهوم اتصال دالة عند نقطة قد تكون لدى التلميذ.

ب - مفاهيم ثانوية (عليا)

تلك المفاهيم المشتقة من المفاهيم الابتدائية عن طريق الربط بعلاقات رياضية أدت إلى تركيب المفاهيم الدنيا بعلاقات وخلق مفهوم جديد أعلى درجة من سابقه أو سابقاته من المفاهيم الأولية.

(4-4) تصنيفات أخرى للمفاهيم

يصنف بعض العلماء المفاهيم الرياضية في ضوء المعايير التالية :

1 - المفاهيم الدلالية Denotative Concepts

وهي تلك المفاهيم التي تستخدم للدلالة على شيء ما مثل مفهوم مستو «أي ثلاث نقط في الفراغ تحدد مستو»، مفهوم الدالة المحدودة «الدالة المعرفة على [أ، ب] والمتصلة على هذه الفترة تكون محدودة». ومفهوم الدالة الأحادية، حاصل الضرب الديكارتي، مفهوم التطابق بين مثلثين ومفهوم العدد الطبيعي والمصفوفة المربعة والعدد الحقيقي... والمفهوم الدلالي هو المفهوم الذي مجموعة الإسناد أو المرجع له (مجموعة الأشياء التي يحددها المفهوم) ليست المجموعة الخالية.

وتقسم المفاهيم الدلالية إلى قسمين :

أ - مفاهيم حسية (محسوسة) Concrete Concepts

وهي المفاهيم التي عناصرها تمثل مجموعة أشياء مادية أي أشياء يمكن ملاحظتها وقياسها أو يمكن تمثيلها بنموذج في العالم الخارجي (الملموس أو المادي المحسوس)⁽³⁾ مثل المسطرة الحاسبة، المنقلة، الحجم، العدد الطبيعي، الكتلة، الارتفاع، القيم القصوى المحلية.

2 - مفاهيم متعلقة بالإجراءات

مثل مفهوم كل من جمع مصفوفتين، ضرب مصفوفتين، تركيب دالتين، المعكوس الضربي أو الجمعي لمصفوفة مربعة، حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد باستخدام طريقة القانون، حل جملة معادلات باستخدام المحددات.

3 - مفاهيم متعلقة بالعلاقات

وهذه المفاهيم تركز على عمليات الربط أو المقارنة بين عناصر مجموعة أو بين عناصر عدة مجموعات مثل المساواة بين مجموعتين (فئتين) علاقات الترتيب، شروط الحقل أو الزمرة، التشاكل بين نظامين.

4 - مفاهيم متعلقة بالبنية أو الهيكل الرياضي

مثل مفهوم كل من خاصية الانغلاق، خاصية التنسيق، خاصية العنصر المحايد في الزمرة، المعكوس الجمعي أو الضربي، الحقل، الحلقة، القيم القصوى المحلية أو المطلقة للدالة، الحجوم الدورانية.

ثالثاً : تصنيف هيرنباخ⁽²⁰⁾

يصنف هيرنباخ المفاهيم الرياضية إلى :

1 - مفاهيم أولية أو ابتدائية (دنيا)

وهي تلك المفاهيم المشتقة والمستمدة من خبرتنا الحسية المرتبطة بالعالم الخارجي.

2 - مفاهيم علاقية

هذه المفاهيم تشتمل على علاقات معينة بين الأشياء كمفهوم البينية أو الاحتواء أو الاتصال عند نقطة «تكون الدالة د (س) متصلة عند النقطة س = أ إذا تحقق :

أ - د (أ) موجودة

ب - نها د (س) = د (أ)
س ← أ

ومن المفاهيم العلاقية أيضاً مفهوم قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة أو قابليتها للتكامل على فترة مغلقة ومفهوم الدالة الفردية أو الزوجية.

3 - مفاهيم عامة ومفاهيم مفردة

المفاهيم العامة تلك المفاهيم التي مجموعة الإسناد لها تحتوي على أكثر من عنصر واحد مثل مفهوم العدد الطبيعي $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ والعدد النسبي $\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ مجموعة الأعداد الصحيحة، $b \neq 0$ والدالة التربيعية والدالة الخطية من الصورة $y = ax + b$ ، $a \neq 0$ ، والمفاهيم المفردة مثل العدد الصحيح - 3 والدالة الخطية المعلومة $y = 2x + 5$ والعدد غير النسبي $\sqrt{2}$. ونجد أن مجموعة الإسناد للمفاهيم المفردة تحتوي على عنصر واحد فقط.

ثانياً : تصنيف جونسون ورازينج⁽⁴⁹⁾

يصنف جونسون ورازينج المفاهيم إلى أربعة أقسام :

1 - مفاهيم متعلقة بالمجموعات

ويتم التوصل إليها من خلال تعميم الخصائص أو الصفة المميزة على الأمثلة أو الحالات الخاصة الواردة مثل مفهوم العدد النسبي والمربع وكثيرات الحدود.

(4-5) تصنيفات المفاهيم الرياضية حسب وظيفتها

يصنف العلماء المفاهيم الرياضية حسب وظيفتها أو صفاتها أو حسب العمليات المتعلقة بها، وسنوضح ذلك :

أولاً : تصنيف برونر⁽³⁴⁾

يصنف برونر المفاهيم الرياضية إلى أربعة أقسام :

1 - مفاهيم ربطية

حيث تستخدم أدوات الربط مثل «و» أي تذكر أكثر من خاصية واحدة في الأشياء التي تقع ضمن إطار هذا المفهوم مثل مفهوم المعين والزمرة والحقل، فعندما نعرف مفهوم متوازي الأضلاع مثلاً نقول «شكل رباعي مستو فيه كل ضلعين متقابلين متساويين وكل زاويتين متقابلتين متساويتين».

ومفهوم تقاطع مجموعتين نقول «مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى وتنتمي إلى المجموعة الثانية».

2 - مفاهيم فصلية

والتي تستخدم فيها أداة الربط «أو» أي يتوفر فيها خاصية واحدة من بين عدة خصائص أو صفات مثل مفهوم الاتحاد بين مجموعتين، نقول «مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى أو تنتمي إلى المجموعة الثانية».

كذلك مفهوم العدد الصحيح غير السالب $s \geq 0$ بمعنى أن هذا العدد يكون أكبر من الصفر أو يساوي الصفر.

ب - مفاهيم مجردة Abstract Concepts

وهذه المفاهيم عناصرها غير محسوسة حيث لا يمكن ملاحظتها أو قياس خصائصها (خصائص عناصر مجموعة الإسناد) مثل هذه المفاهيم: العدد التخيلي، الدالة، الجذر التربيعي، الجذر الأصم، ما لا نهاية.

ويقسم العلماء المفاهيم الدلالية إلى قسمين :

أ - مفاهيم مفردة

وهي تلك المفاهيم التي مجموعة إسنادها مجموعة أحادية مثل مفهوم العدد 9 والنسبة التقريبية π ونقطة الأصل (0.0).

ب - مفاهيم عامة

تلك المفاهيم التي مجموعة الإسناد لها تحتوي على أكثر من عنصر واحد مثل مفهوم العدد الطبيعي، العدد النسبي، العدد المركب، الاقتران التربيعي، كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة...

2 - المفاهيم الوصفية Attributive Concepts

تلك المفاهيم التي تحدد خصائص معينة تتصف بها مجموعة من الأشياء كمفهوم الصدق في العبارات الرياضية أو مفهوم الاتصال في الدوال أو مفهوم

الاشتقاق أو التوازي أو التعامد أو التحويلات الهندسية، ولكن لابد من ملاحظة أنه في حين أن مفهوم الصدق مفهوم وصفي فإن مفهوم عبارة صادقة مفهوم دلالي، فالصدق أكثر تجريدًا من العبارة الصادقة والتوازي أكثر تجريدًا من مستقيمين ل، م متوازيين والتعامد أكثر تجريدًا من ل مستقيم عمود على المستوى س.

وواضح أن مجموعة الإسناد (المرجع) للمفاهيم الرياضية الوصفية هي المجموعة الخالية على أن هناك مفاهيم غير دلالية وغير وصفية وتكون مجموعة الإسناد لها المجموعة الخالية مثل مفهوم عدد زوجي أولي غير العدد 2، والجدير بالذكر أن بعض العلماء يقسمون المفاهيم الوصفية إلى مفاهيم معرفة حيث يعبر عنها بصياغات لفظية شارحة بدلالة مفاهيم أخرى أبسط منها أو سبق تعريفها أو توضيحها، كما أن هناك مفاهيم غير معرفة (لا معرفة) تقبل بدون تعريف ولكن يتم تحديد بعضها من خواصها وكيفية التعامل بها⁽⁵¹⁾.

ومن أمثلة المفاهيم غير المعرفة النقطة، المستقيم، المستوى، المجموعة (الفئة)، فعندما نقول أن الخط المستقيم هو مجموعة لا نهائية من النقط فهذا ليس تعريفًا ولكنه خاصية من خواص المستقيم كما أن النقطة ذاتها ليس لها تعريف.

ولعل وجود اللا معرفات في التراكيب الرياضية هو ميزة لطبيعة الرياضيات تميزها عن غيرها من العلوم فترك المفاهيم دون تعريف هو إعطاء الفرصة لتفسير مدلولاتها طبقًا لطبيعة التركيب الرياضي الذي سوف يستخدم، فمثلاً لفظ مجموعة (Set) مفهوم غير معرف ولكنه يفهم على أنه تجمع من العناصر المعرفة تعريفًا جيدًا فإذا كان مجال الدراسة هو الجبر أو الحساب فإن العناصر تفسر على أنها أعداد وإذا كان مجال الدراسة هو الهندسة فالعناصر تفسر على أنها نقط وإذا كان مجال الدراسة هندسة التحويلات فالعناصر عبارة عن تحويلات هندسية⁽²⁹⁾.

أمثلة لمفاهيم رياضية:

البرهان الرياضي، القضية المنطقية، جبر القضايا، التكافؤ، الاتحاد

٧

(4-6) أهمية استخدام المفاهيم

يمكن تلخيص أهمية وفوائد استخدام المفاهيم في تعليم التلاميذ في الآتي:

1 - استخدام المفاهيم يمكننا من القيام بمجموعة من العلاقات وكذلك التعميمات فباستخدام مجموعة من المفاهيم البسيطة يمكن الربط فيما بينها لتكون تعميماً.

فالتعميم : المربع المنشأ على وتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين.

نجد في هذا المثال المفاهيم البسيطة (مربع، وتر، مثلث قائم الزاوية، يساوي، مجموع، ضلع).

2 - المفاهيم الرئيسية تكون أساساً لاختيار وتنظيم خبرات مناهج الرياضيات في مختلف المراحل والفروع وبالتالي تساعد عند تخطيط المناهج.

3 - المفاهيم تمكننا من اكتشاف مفاهيم جديدة ومعلومات جديدة للوصول إلى قاعدة أو نظرية فباستخدام مفهوم دالة الجيب ودالة جيب التمام يمكن الوصول إلى مفهوم دالة الظل.

4 - تفيد المفاهيم التي يتعلمها الشخص في تفسير مواقف التعلم وتعديل هذا التفسير إذا لزم الأمر فالتلميذ يجب أن يتمكن من تمييز ما إذا كان المفهوم ينطبق على هذا الموقف أم لا. وبالتالي مساعدته في الفهم الوظيفي للمعلومات المعطاة.

5 - المفاهيم الرئيسية تعمل على تبسيط وتجريد الكثير من المعطيات في الحياة العملية فبدلاً من اللجوء إلى الاستخدامات اللفظية الوصفية نستعاض

عنها بكلمة أو رمز وبالتالي نقل من تعقد البيئة المحيطة، فمفهوم الأس اختصر الجملة (اثنان وسبعون مضافاً إليها اثنان وسبعون مضافاً إليها اثنان وسبعون مضافاً إليها اثنان وسبعون وهكذا اثنان وسبعون مرة) إلى الصورة المبسطة (72) ²⁴

6 - المفاهيم تكون وسيلة أو أداة قياس تساعد في الحكم على مدى تمكن التلاميذ من فهم المادة الدراسية، فالتلميذ الذي يتكون لديه معنى مفكك وغير كامل وغير دقيق للمفهوم لا يمكن تطبيق هذا المفهوم على وجه الدقة ويقوده ذلك إلى تفكير سقيم وبالتالي يصعب عليه تكوين المعاني الدقيقة، فالتلميذ الذي لا يعرف خواص اللوغاريتمات وكذلك كيفية التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية لا يمكنه حل المعادلة من الصورة :

$$\text{لو } 2 (3 \text{ س} - 10) = 3$$

لأنه لحل هذه المعادلة يحتاج إلى :

أ - تحويل المعادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية كما يلي:

$$3 \text{ س} - 10 = 2^3 \quad \text{أي } 3 \text{ س} - 10 = 8$$

ب - أن يعرف معنى الأس (القوة) وأن $2^3 = 8$

ج - أن يتمكن من حل المعادلة الناتجة باستخدام مفهوم المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي للأعداد وكذلك العنصر المحايد الجمعي والمحايد الضربي.

$$3 \text{ س} - 10 + 10 = 8 + 10$$

$$3 \text{ س} = 18$$

$$3 \times \frac{1}{3} \text{ س} = 18 \times \frac{1}{3}$$

$$\text{س} = 6$$

7 - لما كان للمفهوم جانبيين، الأول : هو التصنيف أو التمييز بمعنى أن الشخص يلاحظ الأشياء أو الأحداث التي تنطبق على المفهوم، والثاني: مجموعة الارتباطات التي تتداعى إلى ذهن الشخص عن الشيء أو الحدث أي مجموعة الصفات، فعند ذكر كلمة نظام رياضي يتداعى إلى ذهن الطالب عددًا من الأفكار من قبيل :

- أ - ما المجموعة (الفئة) الممثلة لهذا النظام ؟
- ب - ما العملية الثنائية المعرفة على هذه المجموعة ؟
- ج - هل العملية تحقق خواص أو شروط الزمرة ؟
- د - هل مطلوب حل معادلة في هذا النظام ؟

8 - المفاهيم هي حلقة اتصال ولغة اتصال في المجال الواحد لأصحاب التخصص، فالرياضيون في جميع أنحاء العالم يستطيعون التواصل والتفاهم عن طريق لغة المفاهيم والعلاقات الرياضية.

9 - إن فهم المعاني والمصطلحات والكلمات والجمل الرياضية وحلولها في الموقف التعليمي لا يمكن تحقيقه إذا لم يكن الشخص ملماً بهذه المصطلحات أو المفاهيم الخاصة بهذه المادة بمعنى أن يتوافر لديه الفهم الجيد لهذه المفاهيم، وهذا الفهم مع التطبيق قد يزيد من اهتمام التلميذ بالمادة الدراسية وقد يكون سبباً في زيادة ميله إلى دراسة هذه المادة والتخصص فيها.

10 - يعتبر تحصيل المفاهيم من أهم أهداف تدريس الرياضيات في الحلقة الثانية من التعليم الأساسي⁽⁴⁸⁾.

ع

(4-7) استراتيجيات تدريس مفاهيم الرياضية

قبل البدء بتدريس أي مفهوم رياضي للتلاميذ يجب أن يقوم المعلم بمجموعة من الإجراءات من قبيل :

- 1 - تحديد كافة المفاهيم الموجودة في الدرس الذي ينوي تدريسه.

2 - تحليل المفاهيم المركبة أو المفاهيم الثانوية أو المفاهيم المجردة إلى مفاهيم مبسطة أو أولية أو محسوسة إن أمكن.

3 - التأكد من فهم واستيعاب التلاميذ لهذه المفاهيم البسيطة والتي يعتمد عليها المفهوم الجديد.

فعند تدريس مفهوم الحقل مثلاً يجب أن يتأكد المعلم من استيعاب التلاميذ للمفاهيم التالية (فئة، عملية ثنائية، خاصية الانغلاق، خاصية التتسيق، خاصية العنصر المحايد، خاصية المعكوس، الخاصية الإبدالية، الزمرة، الزمرة الإبدالية، خاصية التوزيع).

ويرى دينيز "Denez" أنه لا بد للمتعلم من الوقوف على المتغيرات الرياضية للمفهوم قبل أن تتم عملية التجريد، ومن الفروض التي اقترحها بشأن تكوين المفهوم الرياضي التأكيد على أن تتحقق كل المتغيرات التي يحتويها المفهوم لتأكيد الفهم⁽⁷¹⁾.

4 - تحديد الاستراتيجيات المناسبة (مجموعة التحركات التي يقوم بها المعلم أثناء الشرح) فمن المعلمين من يقدم بالتعريف الخاص للمفهوم مباشرة (تحرك التعريف) ثم يعطي أمثلة إيجابية على المفهوم (تحرك المثال) ويتبع ذلك إعطاء أمثلة سلبية (لا أمثلة) على المفهوم (تحرك اللا مثال). نرمر لهذه الاستراتيجية (تعريف، مثال، لا مثال).

ومن المعلمين من يبدأ بتتابع آخر حيث البدء بالأمثلة الإيجابية (تحرك المثال) كأن يقدم مجموعة من الرسوم لدوال مختلفة تمثل دوال متصلة ثم يقدم الأمثلة السلبية (تحرك اللا مثال) حيث يقدم مجموعة من الرسوم لدوال مختلفة تمثل دوالاً غير متصلة ثم بعد هاتين الخطوتين يقدم التعريف (تحرك التعريف) حيث يقدم تعريف الاتصال أو الاتصال لدالة عند نقطة نرمر لهذه الاستراتيجية (مثال، لا مثال، تعريف). ومن المعلمين من يبدأ بتحرك الأمثلة الإيجابية

(تحرك المثال) ثم يقدم التعريف (تحرك التعريف) ثم بعد ذلك يقدم الأمثلة السلبية للمفهوم (تحرك اللا مثال) هذه الاستراتيجية نرسم لها بالرمز (مثال، تعريف، لا مثال).

والجدير بالذكر أن هندرسون عرف الاستراتيجية التعليمية بأنها «كل مجموعة متتابعة من التحركات التي يقوم بها المعلم عند تعليم أي مفهوم تسمى استراتيجية تعليم ذلك المفهوم»⁽³⁴⁾.

ومن الاستراتيجيات المتبعة (تعريف، مثال، لا مثال)، (تعريف، مثال)، (مثال، تعريف)، (مثال، لا مثال، تعريف)، (انتماء، عدم انتماء، تعريف)، وسنقدم نموذجاً لخطوة متبعة لتدريس مفهوم المتراجحات باستخدام استراتيجية (تعريف، مثال) حيث يتم خلال هذه الخطوة التعرض للأهداف السلوكية، التمهيد لتقديم التعريف من خلال الأمثلة، التوصل للتعريف، تقويم تحصيل المتعلم لهذا المفهوم.

(4-8) درس نموذجي في تقديم المفهوم

المتراجحات

✓ الأهداف السلوكية

- 1 - أن يفهم الطالب المقصود بالمتراجحة من الدرجة الأولى في متغير واحد.
- 2 - أن يميز الطالب بين المتراجحة والمتساوية والمعادلة.
- 3 - أن يتمكن من حل المتراجحة من الدرجة الأولى في متغير واحد.
- 4 - أن يمثل المتراجحة من الدرجة الأولى على شكل فترة.

تقديم

إن أي مشكلة أو سؤال من خلالها (خلاله) يمكن التعبير عنها (عنه) كعلاقة أكبر من «<» أو أصغر من «>» أو أكبر من أو يساوي «≤» أو أقل من أو يساوي «≥» فإنها تحتاج إلى نظام المتراجحات (المتباينات) والمتراجحة

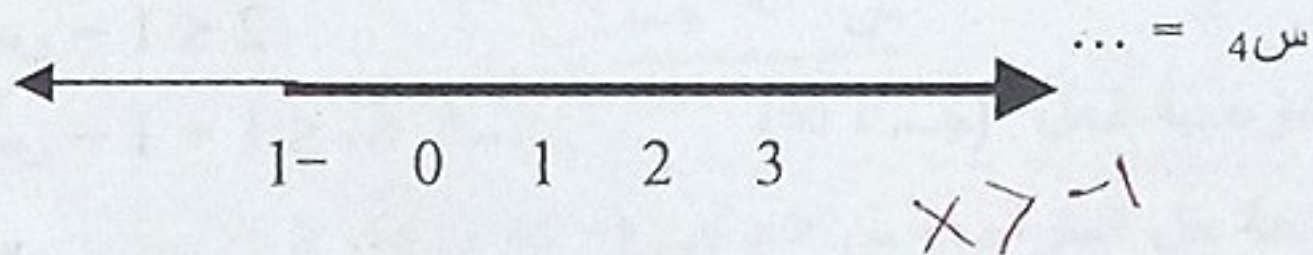
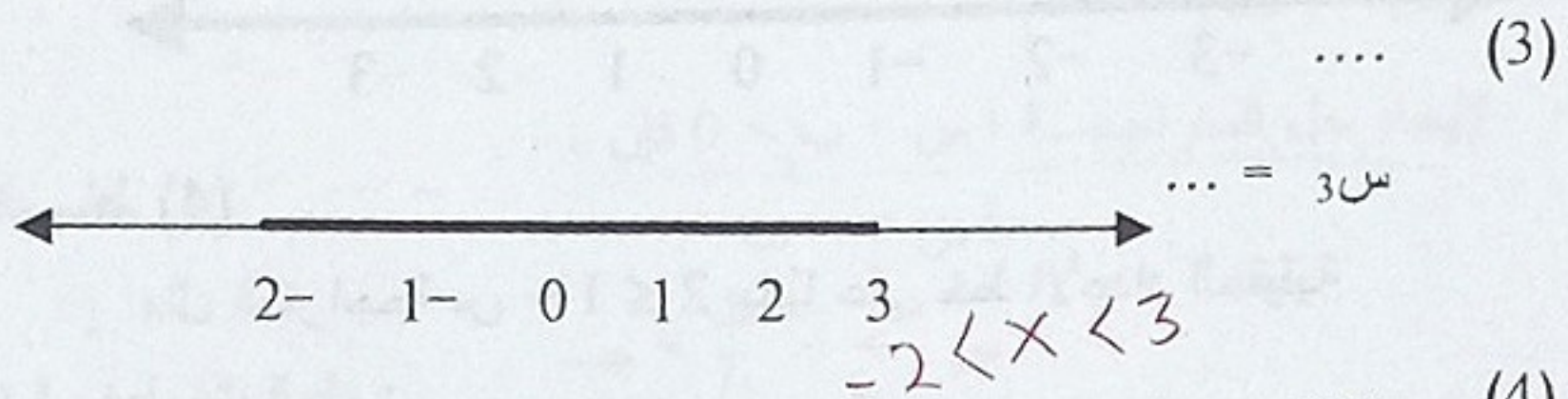
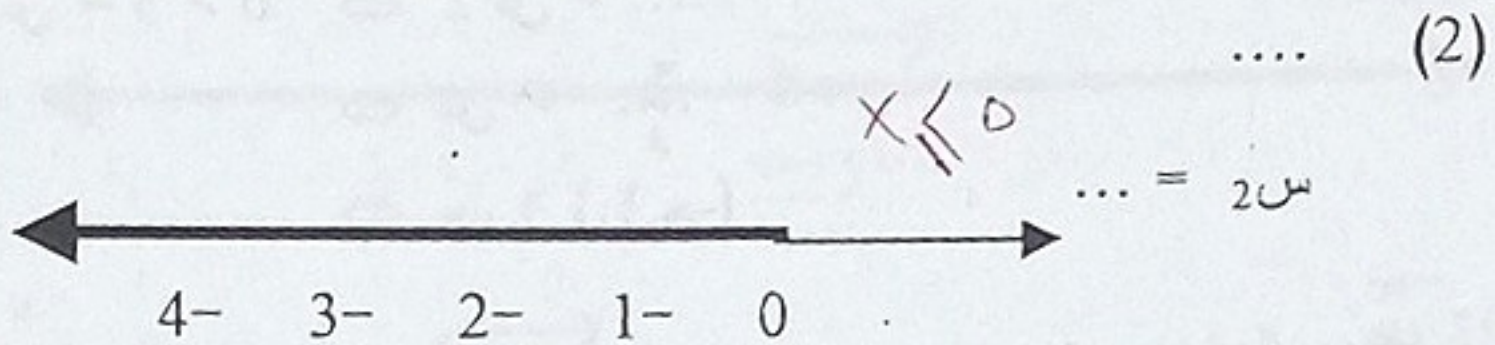
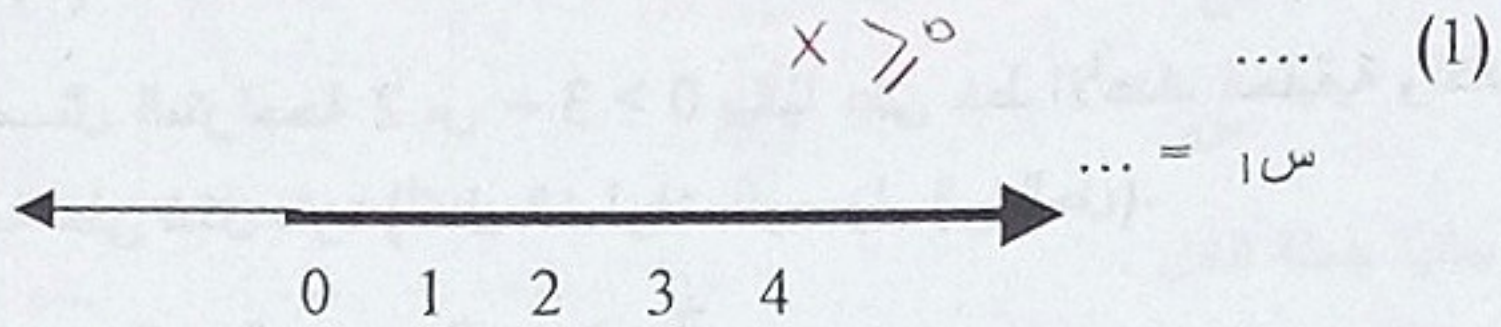
(المتباينة) جملة رياضية تفيد بأن كميتين غير متساويتين وتستخدم الرموز $<$ أو $>$ أو $\leq$ أو $\geq$ كما سبق معرفة هذه الرموز فعندما تريد التعبير بالرموز عن أن العدد 5 أصغر من 7 تكتب ذلك $5 < 7$ كذلك تعرضنا إلى أنه يمكن تمثيل الأعداد على خط الأعداد وكل عدد يقابله نقطة وحيدة على هذا الخط.

وعندما نريد تمثيل جملة (مترابحة) فنحن نعين جزء من خط الأعداد والذي يحوي عدداً محدوداً من النقاط.

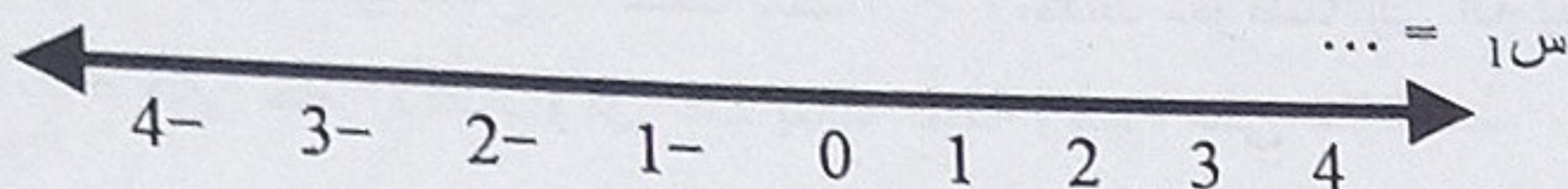
مرحلة الكشف

نشاط (1)

الأشكال التالية تمثل مترابحات على خط الأعداد. أوجد الجملة التي تمثل المترابحة :

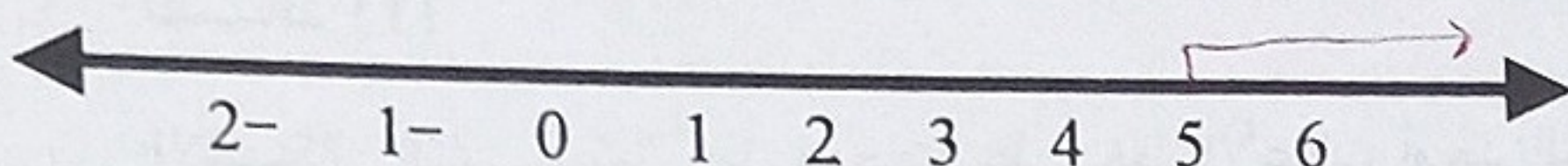


(5)



نشاط (2)

مثل المتراجحة $s < 5$ بيانياً على خط الأعداد الحقيقية، ثم اكتب هذه المجموعة من النقاط على شكل فترة.



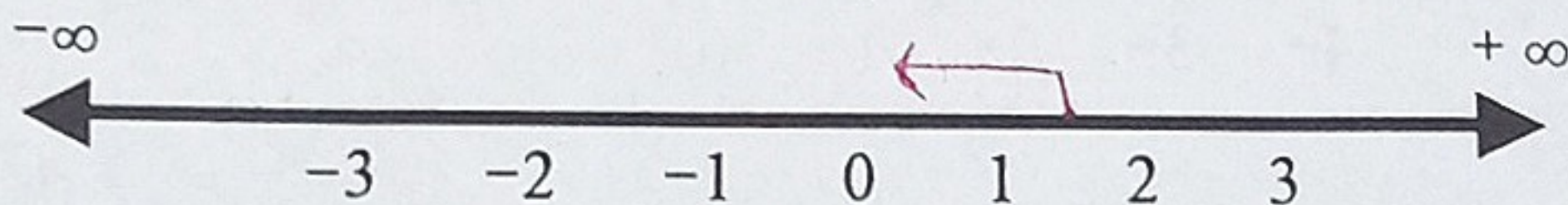
نشاط (3)

مثل المتراجحة $2 - s > 3$ بيانياً على خط الأعداد الحقيقية واكتب المتراجحة على شكل فترة (أكمل الخطوات للوصول إلى الحل).

$$2 - s > 3 \Leftrightarrow 2 > s + 3$$

$$\Leftrightarrow s > -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow s \in (-\infty, \frac{3}{2})$$



نشاط (4)

مثل المتراجحة $2 \leq 1 - s$ بيانياً على خط الأعداد الحقيقية

✓

أكمل خطوات الحل :

$$2 \leq 1 - s$$

$$s \leq 1 - 2$$

$$s \leq -1$$

س د $[3, \infty)$

نشاط (5)

أكمل خطوات الحل للمراجعة :

$$أس + ب < 0 \text{ حيث } أ < 0$$

الحل

$$أس + ب + (-ب) < 0 + (-ب)$$

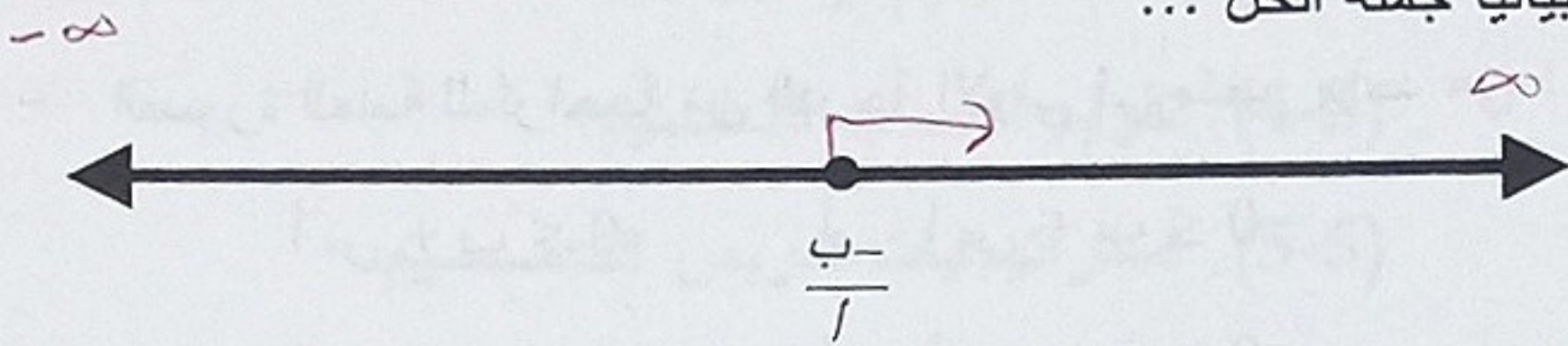
$$أس + 0 < -ب$$

$$أس < -ب$$

$$أس < 1$$

$$س < \frac{-ب}{أ}$$

مثل بيانياً جملة الحل ...



مرحلة تقديم المفهوم :

1 - لإيجاد حل المتراجحة $أس + ب < 0$ فإن :

$$أس < -ب$$

$$س < \frac{-ب}{أ} = ج$$

$$س < ج$$

مجموعة الحل (ج ، ∞)

2 - مجموعة حل المتراجحة $س > د$ هي $(-∞ ، د)$

التطبيق

مرحلة التطبيق

أولاً : أوجد الحل لكل متراجحة مما يأتي على شكل فترة :

$$5 < 1 + \frac{3s}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1 - s^2}{15} \geq \frac{3s}{5} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} + \frac{s^4}{3} < \frac{1 - s^2}{15} - \frac{s}{5} \quad (3)$$

$$5s - 20 < . \quad (4)$$

$$12 \leq (3 + s) 2 + 6 \quad (5)$$

ثانياً : ما هو العدد الذي إذا ضربته في 3 وأضفت إليه 6 كان الناتج أكبر من أربع أمثال العدد.

ملخص الدرس :

1 - الصورة العامة للمتراجحة من الدرجة الأولى في متغير واحد هي :

$$أس + ب < 0 \quad \text{أو} \quad أس + ب \leq 0$$

$$أس + ب > 0 \quad \text{أو} \quad أس + ب \geq 0$$

2 - حل المتراجحة $أس + ب > 0$ هو $s > -\frac{ب}{أ}$

$أس + ب < 0$ هو $s < -\frac{ب}{أ}$

الواجب :

1 - أوجد مجموعة الحل للمتراجحة $7s - 15 \geq 6$

2 - عبّر عن العلاقة الطولية بين أطوال أضلاع المثلث على شكل متراجحة «مجموع أي ضلعين في أي مثلث أطول من الضلع الثالث».

الفصل الخامس

تدريس التعميمات

Teaching the Generalizations

- (1-5) مقدمة
- (2-5) أنواع التعميمات
- (3-5) تعلم التعميم أو القاعدة
- (4-5) تقويم اكتساب التعميم
- (5-5) استراتيجيات تدريس التعميم
- (6-5) درس نموذجي في تقديم التعميم

الفصل الخامس التعميمات

(1-5) مقدمة

الرياضيات هي تلك الأبنية أو التراكيب التي تتكون من مفاهيم ومسلمات ومصطلحات وخوارزميات ومشكلات رياضية وطرق برهنة ومعارف ولا معارف وقواعد وتعميمات.

ولكن ما هو المقصود بالتعميم ؟

عندما يواجه الفرد بمثير خارجي S (Stimulus) فإنه يقوم بالاستجابة لهذا المثير حسب خبراته وعندما يقوم الفرد بالاستجابة R (Response) استجابات متشابهة لمثيرات متشابهة (هذه المثيرات والاستجابات قد لا تكون متطابقة تمامًا) هذه العملية في علم النفس تسمى بالتعميم (Generalization) أو المبدأ (Principle) أو القاعدة Rule.

وعموماً فالمبدأ أو التعميم أو القاعدة هو أو هي المقدرة المستتجة التي تجعل الفرد قادراً على الاستجابة لفئة من المواقف المرتبطة بمثيرات بفئة من الاستجابات $(S \rightarrow R)$.

ويرى «جانبيه» أحد علماء النفس المشهورين أن التعميم هو علاقة بين مفهومين أو أكثر⁽⁶⁵⁾.

والجدير بالذكر أن جانبيه حدد أنماط التعلم في نسق هرمي يتدرج من أبسط أنواع التعلم وهو تعلم الإشارات إلى أكثرها تعقيداً وارتقاءً وهو تعلم حل المشكلات، وهي متدرجة كالتالي :

1 - تعلم الإشارات Signals Learning

2 - تعلم الارتباطات بين المثيرات والاستجابات Stimulus - Response.

3 - تعلم تسلسلات ارتباطية حركية Motor Chaining Learning

4 - تعلم ترابطات لفظية Verbal Association

5 - تعلم التمييز Discrimination Learning

6 - تعلم المفهوم Concept Learning

7 - تعلم القواعد والمبادئ Principles and Rules Learning

8 - تعلم حل المشكلات Problem Solving Learning

ويلاحظ أن تعلم القواعد أو المبادئ أو التعميمات تأتي في المرحلة قبل الأخيرة من الهرم وتأتي بعد تعلم المفاهيم.

والتعميم الرياضي عبارة رياضية (جملة إخبارية) تنطبق على مجموعة من الأشياء أو هو توسيع لقاعدة بسيطة لتصبح عبارة أعم وأشمل في حين تكون العبارة البسيطة حالة خاصة منها.

ويمكن [تعريف التعميم الرياضي : بأنه عبارة عن جملة خبرية تحدد علاقة بين مفهومين أو أكثر من المفاهيم الرياضية].

[والتعميمات الرياضية يتم استنتاجها أو اكتشافها والبرهنة على صحتها أو خطأها]

(ويمكن اعتبار المسلمات أو البديهيات تعميمات نسلم بصحتها بدون برهان أي أنها تمثل لا مبرهنات).

كذلك فالنظريات تعتبر تعميمات مبرهن عليها.

أمثلة لتعميمات رياضية :

1 - مجموع طولي أي ضلعين في أي مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

2 - مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي قائمتين.

3 - الدوال القابلة للاشتقاق عند أي نقطة في مجالها تكون متصلة عند هذه النقطة (نظرية).

- 4 - من نقطة خارج مستقيم معلوم يمكن رسم مستقيم يوازيه (مسلمة).
- 5 - أي نقطتين في المستوى يمكن أن يمر بهما مستقيم واحد (مسلمة).
- 6 - يمكن رسم دائرة بمعلومية نقطة وطول نصف قطرها.
- 7 - مجموع ^{مساحتي} المربعين المنشأين على ضلعي القائمة يساوي ^{مساحة} المربع المنشأ على الوتر (نظرية فيثاغورث).
- 8 - إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فكل زاويتين متناظرتين متساويتين وكل زاويتين متبادلتين متساويتين وكل زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع مجموعهما قائمتين.
- 9 - إذا كانت الدالة d (س) متصلة على $[a, b]$ وكان $d(a), d(b)$ مختلفتين في الإشارة فإنه يوجد على الأقل عدد $c \in (a, b)$ بحيث $d(c) = 0$.
- 10 - يكون النظام الرياضي (س، *) زمرة إذا كانت * عملية داخلية على س وتحقق خاصية التجميع وخاصية العنصر المحايد وخاصية المعكوس بالنسبة للعملية *.
- 11 - إذا كانت كل من الدالتين f, g (س)، h (س) قابلتين للاشتقاق عند النقطة س فإن الدالة d (س) $= f - g$ (س) $+ h$ (س) تكون قابلة للاشتقاق عند س.
- 12 - إذا كانت الدالة d معرفة على الفترة $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) وكانت تحقق:

$$d'(x) < 0$$
 لكل $x \in (a, b)$ فإن الدالة d (س) تكون متزايدة فعلاً في $[a, b]$.
 كذلك فالقوانين والمبادئ الرياضية هي تعميمات رياضية ومن أمثلتها:

13- معادلة القطع الناقص :

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

14- حل المعادلة التربيعية $أس^2 + ب س + ج = 0$ هو

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4ج}}{2}$$

15- $\sim (ب \wedge ج) \Leftrightarrow ب \sim \vee ج$

16- قانون التوزيع لعملية الضرب على عملية الجمع

لكل أ، ب، ج $\exists$ ح «مجموعة الأعداد الحقيقية»

$$أ \times (ب + ج) = (أ \times ب) + (أ \times ج)$$

17- $\frac{د}{س} = (س) \bar{د} \mid س - س1 = نها$
 $\frac{د(س1) - (س + هـ) - د(س1)}{هـ} \leftarrow 0$

18- $لور ب \times ج = لور ب + لور ج$

(2-5) أنواع التعميمات

تقسم التعميمات إلى قسمين (التعميم الكلي - التعميم الجزئي).

أولاً : التعميم الكلي

وهو عبارة عن قضية تكون مسورة سوراً كلياً أي تعميماً كلياً ونعبر عن

ذلك بالجملة الرياضية :

$\forall س \exists ب : ب(س)$ وتقرأ لكل س تنتمي إلى الفئة س تكون القضية ب(س) قضية صادقة.

من الأمثلة على ذلك :

1 - جميع الاقترانات كثيرة الحدود تكون قابلة للتكامل على الفترة المعطاة.

2 - لكل أ، ب، ج $\exists$ ح مجموعة الأعداد الحقيقية.

$$(أ \times ب) \times ج = أ \times (ب \times ج) \text{ خاصية التجميع.}$$

3 - كل الأعداد الصحيحة تمثل أعداد حقيقية « ٧ س ٣ ص : س ٣ ح ».

4 - لكل س، ص ٣ ح، ص $\neq 0$

$$\text{لوم} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لوم س} - \text{لوم ص}$$

وقد لا يذكر أحياناً في التعميم لفظ لجميع أو لكل ولكن يفهم من سياق الألفاظ المستخدمة.

5 - الدالة المحدودة والمطرودة على [أ، ب] تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

6 - الزاوية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة.

ثانياً : التعميم الجزئي أو السور الوجودي أي العبارة المسورة جزئياً
ويستخدم الرمز E أو لفظ يوجد أو بعض والتعبير الرمزي لذلك E س ٣ س :
هـ (س)، أمثلة على ذلك :

1 - بعض الدوال المتصلة تكون غير قابلة للاشتقاق.

2 - توجد تحويلات هندسية تمثل تحويل تقايس.

3 - بعض الدوال التربيعية لها جذران تخيليان.

(3-5) تعلم التعميم أو القاعدة

المقصود بذلك عملية الربط بين مفهومين أو أكثر بحيث يتمكن المتعلم من الاستجابة لأوضاع مختلفة بناءً على مبدأ أو قاعدة معينة ولتحقيق ذلك ينبغي توفر بعض الشروط:

أولاً : الشروط الداخلية

1- توفر البنية المعرفية والحصيلة المفهومية المناسبة لدى المتعلم.

2- تمكن المتعلم من القيام ببعض المهارات المعرفية والعقلية.

3- توافر الدافعية المناسبة.

ثانيا : الشروط الخارجية

- 1 - معرفة المتعلم بالأهداف المتوقعة إيجازها.
- 2 - تقديم المفاهيم ذات العلاقة في إطار يتناسب مع البداية المعرفية للمتعلم.
- 3 - تقديم القاعدة أو التعميم بالطريقة المناسبة مثل العرض أو الاكتشاف مع استخدام استراتيجيات المثال والمثال.
- 4 - استبعاد التفاصيل المشتقة والتي يشوبها الغموض.
- 5 - تقديم بعض المثيرات اللفظية لإثارة المتعلم لاسترجاع مكونات المفاهيم التي تتضمنها القاعدة أو التعميم.
- 6 - إتاحة الفرصة المناسبة لتطبيق المبدأ أو القاعدة في سياقات جديدة.
- 7 - تقديم التعزيز المناسب والتغذية الراجعة المناسبة.

والجدير بالذكر أن مجرد تسميع القاعدة لا يدل على أن الفرد قد تعلمها وإنما يدل على ذلك القيام بالأفعال الصحيحة التي تتعلق بها وقد ينشد التلاميذ في الفصل قواعد النحو ويكتبون مخالفين لهذه القواعد وينقلون القوانين العلمية نقل مسطرة ويلفون تجاربهم العلمية لكي تتفق مع هذه القواعد ويحفظون النظريات أو النقد الأدبي ولكنهم يعجزون عن حل المسائل الرياضية⁽¹³⁾.

إذن يعتبر تعلم المبادئ والقواعد وثيق الصلة بحل المشكلات ويزودنا «جانيه» بخمس قواعد تعليمية تيسر تعلم القواعد أو التعميمات :

- 1 - تزويد المتعلم بمعلومات عن طبيعة التعلم الناجح.
- 2 - مساعدة المتعلم على تمييز المكونات الأساسية للمفاهيم.
- 3 - تزويد المتعلم بتعليمات وتوجيهات لفظية تيسر تكوين سلاسل من المفاهيم المناسبة.
- 4 - استخدام أسئلة موجهة تشجع المتعلم على أن يوضح القاعدة أو المبدأ.
- 5 - تشجيع المتعلم على أن يقدم أوصافاً لغوية للقاعدة بمعنى أن يصيغ القاعدة لغوياً.

ويمكن تعلم المبدأ أو التعميم أو القاعدة من خلال عمليات الاستقصاء العلمي ودروس الاكتشاف الموجه والمناقشات الجماعية وعمليات الاستقراء الصحيحة واستخدام استراتيجيات حل المشكلة.

(4-5) تقويم اكتساب التعميم

لكي يتمكن المعلم من تقويم أداء تلاميذه على مدى اكتسابهم للتعميم وقدرتهم على استخدامه فإنه من الممكن اعتماد نموذج «ديفيس» في اكتساب التعميم ويشمل هذا النموذج التحركات في مستويين⁽⁶¹⁾:

المستوى الأول :

فهم المعنى المتضمن في التعميم من حيث :

- 1 - فهم المفاهيم والمصطلحات الواردة في التعميم.
- 2 - صياغة التعميم بلغة التلميذ الخاصة.
- 3 - إيراد أمثلة وحالات خاصة عن التعميم.
- 4 - ذكر الشروط الضرورية لاستخدام التعميم.
- 5 - استخدام التعميم في حالات خاصة وبسيطة.

المستوى الثاني :

تبرير التعميم واستخداماته من حيث :

- 1 - بيان صحة التعميم أو برهنته.
- 2 - استخدام أمثلة عددية ومادية لتوضيح التعميم.
- 3 - التعرف على استخدامات التعميم في مواقف غير مألوفة.

ولنطبق نموذج «ديفيس» من خلال المثال التالي:

استخدم نموذج «ديفيس» لتقويم مدى اكتساب التلاميذ للتعميم «إذا كان ق اقترانا (دالة) متصلاً (متصلة) على الفترة [أ، ب] وكان ق (أ)، ق (ب) مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد على الأقل عددًا ج د (أ، ب) بحيث يكون ق (ج) = صفر.

الخطوات المتبعة :

المستوى الأول :

1 - فهم المفاهيم والمصطلحات الواردة في التعميم
اقتران (دالة)، فترة [أ، ب]، ق (أ)، ق (ب)، مختلفين في الإشارة،
يوجد على الأقل، ق (ج) = 0، اتصال دالة على فترة.

2 - صياغة التعميم بلغة التلميذ الخاصة
لدينا الاقتران أو الدالة المعرفة على الفترة المغلقة [أ، ب] ومجالها
المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية وكانت هذه الدالة تحقق الشرط إن
إشارة ق (أ) مخالفة لإشارة ق (ب) بمعنى أن إحداهما موجبة
والأخرى سالبة فإنه لابد من وجود قيمة واحدة على الأقل لتكن ج
تنتمي إلى الفترة المفتوحة (أ، ب) بحيث تكون قيمة الدالة عند ج
تساوي صفر.

أي أن ج - يعتبر جذراً (صفرًا) للدالة.

3 - إيراد أمثلة وحالات خاصة عن التعميم

مثال (1)

$$R \leftarrow [1, 1-] : ق$$

$$ق (س) = س^3$$

مثال (2)

$$R \leftarrow [4, 1-] : ق$$

$$ق (س) = س^3 - 3س.$$

4 - ذكر الشروط الضرورية لاستخدام التعميم

أ - الدالة متصلة على فترة مغلقة [أ، ب]

ب - ق (أ)، ق (ب) مختلفين في الإشارة.

5 - استخدام التعميم في حالات خاصة وبسيطة
يمكن للمعلم أن يسأل التلاميذ أن يحسبوا أصفار (جذور) الدالة المعطاة
على فترة مغلقة معلومة.

المستوى الثاني

1 - يمكن من خلال الرسم البياني لدالة معلومة معرفة على فترة
مغلقة وهي متصلة على هذه الفترة نتصور أننا تحركنا من النقطة التي تمثل قيمة
الدالة عند أ نجد إشارتها سالبة مثلاً ولكي نصل إلى النقطة التي تمثل قيمة الدالة
عند ب والتي نجد إشارتها موجبة نلاحظ أننا لابد أن نقطع المحور السيني في
نقطة لتكن جـ مثلاً معنى ذلك أن $ق(ج) = 0$ صفر.
وأحياناً يكون العكس نبدأ من $ق(أ)$ تكون موجبة أي أعلى المحور السيني ثم
نقطع المحور السيني في نقطة أو أكثر (حسب حالة الدالة) لنصل إلى النقطة التي
تمثل $ق(ب)$ حيث إشارتها سالبة.

2 - استخدام أمثلة عددية ومادية لتوضيح التعميم

مثال :

$$د : [-1, 3] \leftarrow R$$

$$د(س) = 2س + 1$$

لاحظ أن الفروض (الشروط) الثلاثة لهذه النظرية (بلزانو) كافية وغير
لازمة، بمعنى أنه يمكن إيجاد دالة متصلة على فترة مغلقة $[أ، ب]$ ولكن $د(أ) > 0$ ،
 $د(ب) < 0$ غير مختلفين في الإشارة وتحقق وجود نقطة جـ بحيث $د(ج) = 0$.

مثال :

$$د : [-1, 4] \leftarrow R$$

$$د(س) = 2س^2. \quad \text{حيث جـ} = 0 \in (-1, 4).$$

3 = التعرف على استخدامات التعميم في مواقف غير مألوفة مثل:

أو وجود التلميذ أمام حالة العجز أو غياب النجاة المعرفة على الفترة المعلومة.

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$4 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

فقط ههنا

النتيجة هي مجموع « دافيس » في توضيح مدى اكتساب التلاميذ للتعميمات

في كل

المعادلة الترميزية على الصورة :

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

وهي معادلة دائرة مركزها النقطة (ل ، ك) وطول نصف قطرها

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

إذا كان الترميز متصلاً على (أ ، ب) وكان د قابلاً للاشتقاق على (أ ، ب)

وكانت د (أ) - د (ب) فإنه يوجد على الأقل عددًا جـ د (أ ، ب) بحيث

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

إذا كان د : (أ ، ب) متصلاً وقابلاً للاشتقاق على (أ ، ب) فإنه

يوجد على الأقل عدد جـ د (أ ، ب) بحيث د (أ ، ب) - د (ب) =

ويورد فريد أبو زينة⁽⁵⁴⁾ خطوات هامة للتتابع التدريسي لتدريس

التعميمات منها:

1 - إخبار المتعلم عن طبيعة الأداء المتوقع عندما ينهي تعلم المبدأ أو التعميم

بغرض الحصول على تعزيز فوري للمتعلم.

2 - توجيه أسئلة للمتعلم لاستدعاء المفاهيم المتعلمة السابقة والتي تمثل

متطلب قبلي للتعميم.

- 3 - استخدام عبارات لفظية أو رموز (كالأمثلة والأسئلة) تقود المتعلم لدمج سلاسل المفاهيم اللازمة لتكوين المبدأ أو التعميم.
- 4 - يطلب من المتعلم وصف حالة أو أكثر من الحالات التي تنطبق على التعميم وتكون مثالاً عليه.
- 5 - يطلب من المتعلم وصف التعميم أو المبدأ وعمل صياغة لفظية له.
- 6 - يتم التتابع السابق عادة بطريقتين:
 - أ - طريقة العرض (الشرح أو التفسير).
 - ب - طريقة الاكتشاف الموجه.

ويضيف فريد أبو زينة : أنه يمكن زيادة قدرة التلاميذ على التعميم باتباع تدريب معين كما طبقه ويلز (1961) على التلاميذ لمدة أسبوعين وذلك وفقاً للخطوات التالية :

- 1 - تجميع البيانات عن حل مسائل و أمثلة مساعدة.
- 2 - تنظيم الجداول وذلك يساعد على التعميم.
- 3 - إيجاد نظام أو نموذج واختباره بعدة أمثلة.
- 4 - تطبيق النموذج على المسألة المحددة والتحقق من صحة الجواب.

(5-5) استراتيجيات تدريس التعميم

من التحركات المتبعة من قبل المعلمين أثناء تدريسهم للتعميمات

- 1 - تحرك التقديم
ويقصد بذلك تهيئة التلاميذ وزيادة دافعيتهم واستعدادهم للتعلم وزيادة انتباههم عن طريق ذكر عنوان الدرس أو توضيح أهداف الدرس أو التقديم لأهمية الموضوع المراد شرحه.

- 2 - تحرك الأمثلة
حيث يقوم المعلم بتقديم مثالاً أو أكثر على التعميم والمثال عموماً يمثل

حالة خاصة من الحالات التي ينطبق عليها التعميم.

فمثلاً :

$$^4I = I \times I \times I \times I, ^3I = I \times I \times I, ^2I = I \times I$$

$$\text{لوب س.ص} = \text{لوب س} + \text{لوب ص}$$

$$\text{لوب } \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لوب س} - \text{لوب ص}$$

$$\text{لوب } 2 = 6 = \text{لوب } (2)(3) = \text{لوب } 2 + \text{لوب } 3$$

$$\text{لوب } \frac{5}{3} = \text{لوب } 5 - \text{لوب } 2$$

3 - تحرك الأمتلة

وهذه غالباً ما تقدم بعد تحرك الأمتلة حيث تقدم حالات لا تنطبق على

التعميم فمثلاً : لوب س.ص $\neq$ لوب س. لوب ص

$$\text{لوب } \frac{\text{س}}{\text{ص}} \neq \text{لوب س} \div \text{لوب ص}$$

4 - تحرك صياغة التعميم

حيث يساعد المعلم التلاميذ على اكتشاف الصياغة اللفظية للتعميم فعندما

يكتشف التلاميذ أنه في كل مثلث أ ب ج يكون :

$$\text{قياس } > \text{أ} + \text{قياس } > \text{ب} + \text{قياس } > \text{ج} = 180^\circ$$

يمكن أن يتوصل التلاميذ إلى أن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي قائمتين.

5 - تحرك التفسير

يقوم المعلم بتوضيح المفاهيم الغامضة أو الصيغية في التعميم عن طريق

إعادة شرحها أو تقديمها بصورة مبسطة أو بطريقة أخرى حتى يتضح المعنى

للمتعلم فعندما يكون التعميم :

القطع الناقص هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون مجموع بعديها عن

نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدار ثابت هو 2 أ. يقوم المعلم بتوضيح معنى

كل من المحل الهندسي، مجموع بعديها، النقطتين الثابتتين، 2 أ سواء بالرسم أو غيره من صور التوضيح الرياضي.

وفي التطبيقات الخاصة برمي حجر من قمة برج إلى أعلى ويطلب من التلميذ حساب الزمن الذي يكون فيه الحجر على ارتفاع معين من قمة البرج فعند حل هذا التمرين يظهر لدينا قيمتين للزمن ن₁، ن₂ فيطلب المعلم من التلاميذ تفسير ذلك حيث أن الجسم (الحجر) يكون على هذا الارتفاع مرتين مرة أثناء صعوده إلى أقصى ارتفاع ومرة أثناء هبوطه من أقصى ارتفاع.

6 - تحرك التبرير Justification move

حيث يقوم المعلم بإعطاء الدليل أو الحجة التي تدعم صحة التعميم أو تجعل التعميم مقنعاً حيث أن التعميمات تكون صحيحة إذا دعت بالبرهان. فعندما نقول أن لو $1000000 = 6$ وذلك لأن لو $1000000 = 10$ لو 10^6 وهذا يساوي 6 لو $10 = 6 = (1) 6 = 6$ لأن لو $10 = 1$.

7 - تحرك التطبيق Application move

حيث يتم تقديم المشكلات الرياضية أو التمارين والمسائل والتدريبات المعتمدة على التعميم وهذه تتطلب من التلاميذ المهارة في اختيار التعميم المناسب.

فالتلميذ يتعرض لمجموع المتوالية الحسابية

$$ج - ن = \frac{ن}{2} [2أ + (ن - 1) د] \text{ حيث } ن \text{ عدد الحدود}$$

أ : الحد الأول، د : الأساس

وكذلك لمجموع المتوالية الهندسية

$$ج - ن = \frac{(1 - م^n) / (1 - م)}{1 - م} ، م \neq 1$$

حيث م أساس المتوالية الهندسية، أ الحد الأول.

ولذلك عندما يكون المطلوب إيجاد مجموع الحدود الستة الأولى للمتوالية 3، 6، 12، 24، ..

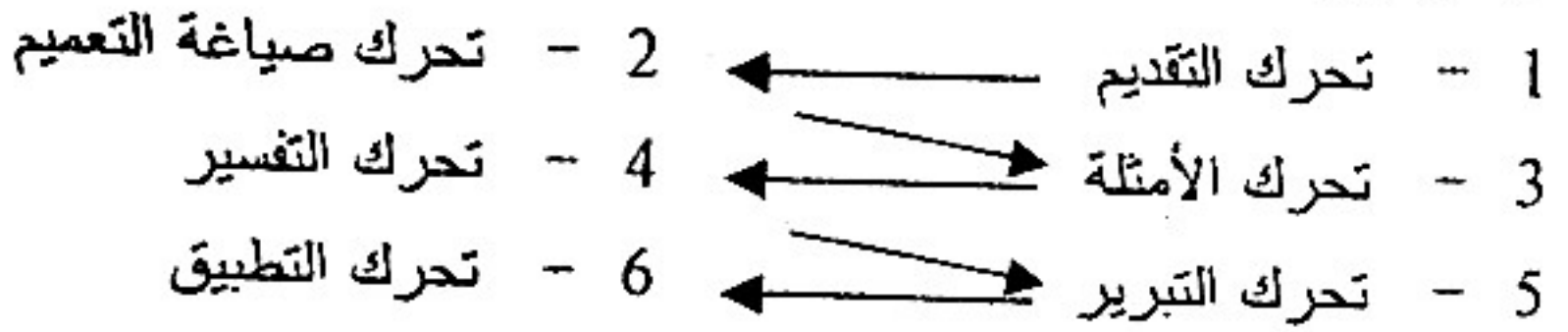
فإنه يجب أن يتعرف التلميذ إن كانت هذه الأعداد المتوالية تمثل متتالية (متوالية) حسابية أو هندسية ليتمكن من استخدام القانون المناسب لها.

وعموماً يمكن تقسيم مجموعة التحركات أو الاستراتيجيات إلى قسمين:

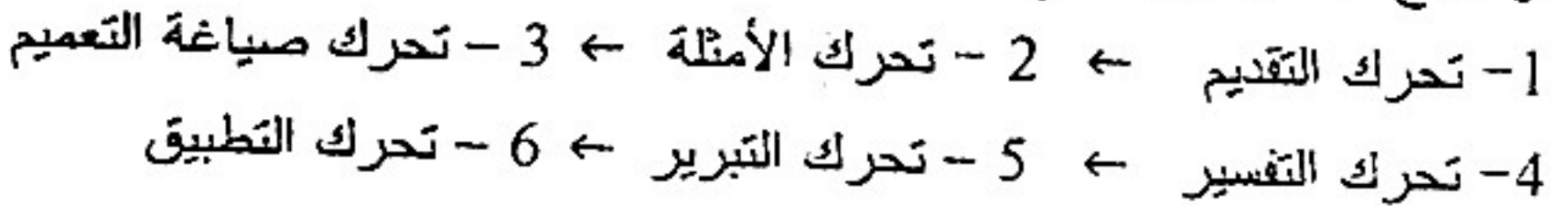
أولاً : تحركات طريقة العرض (Exposition)

من الاستراتيجيات الشائعة لتدريس التعميم الرياضي بطريقة العرض

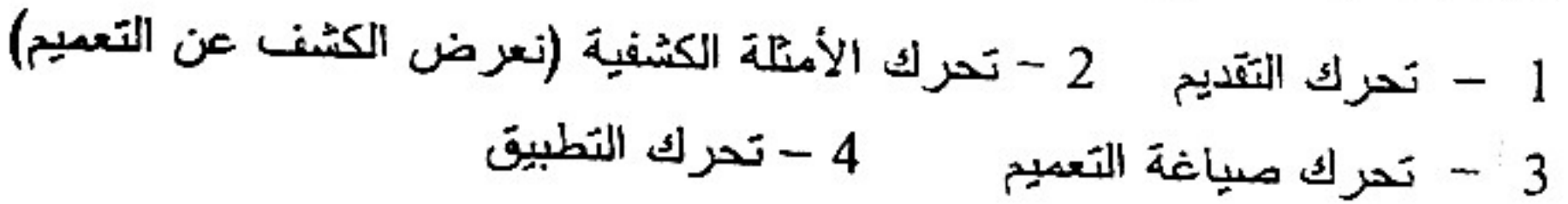
الاستراتيجية :



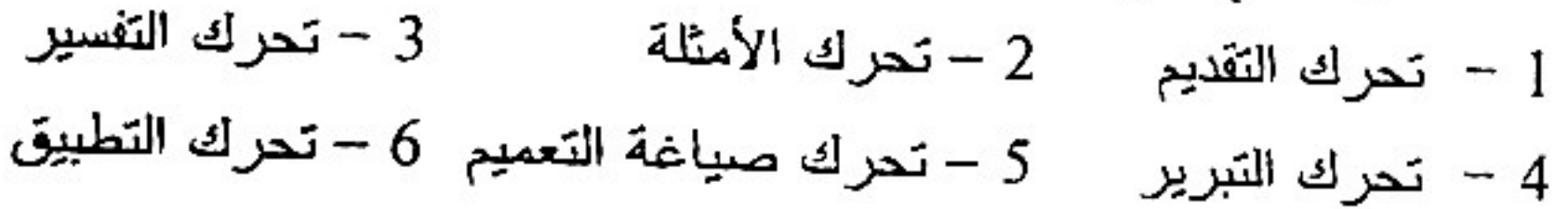
أو اتباع الاستراتيجية :



ثانياً : تحركات طريقة الاكتشاف (Discovery)



بينما في طريقة الاكتشاف الموجه تستخدم الاستراتيجية التالية :



ويمكن أن يتم ذلك عن طريق :

أ - التعميم عن طريق الأمثلة.

ب - التعميم عن طريق الأسئلة الحوارية.

ج - التعميم عن طريق الأسلوب الاستقرائي.

والأمثلة التالية توضح تلك الطرق :

مثال (1)

التعميم «مربع أي عدد فردي هو عدد فردي»

اختر الأعداد الفردية 1، 3، 5، 7، 9، ..

$$\text{نجد } 1^2 = 1 \text{ عدد فردي}$$

$$3^2 = 9 \text{ عدد فردي}$$

$$5^2 = 25 \text{ عدد فردي}$$

$$7^2 = 49 \text{ عدد فردي}$$

$$9^2 = 81 \text{ عدد فردي}$$

ما هي الصورة العامة للعدد الفردي ؟

$$\text{س } 2ن + 1 \text{ حيث ن عدد طبيعي}$$

$$\text{س}^2 = (2ن + 1)^2$$

$$= 4ن^2 + 4ن + 1$$

$$= 2(2ن^2 + 2ن) + 1$$

$$\text{حيث ل } 2ن^2 + 2ن = 2ل + 1$$

وهو يمثل عدد فردي.

مثال (2)

التعميم «المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع

الثالث ويساوي نصفه».

المطلوب : إثبات أن

$$\overline{هـ د} \parallel \overline{ج ب} ، \overline{هـ د} = \frac{1}{2} \overline{ج ب}$$

الحل :

نرسم المثلث أ ب ج بحيث ينطبق الضلع ب ج على محور السينات

وتكون منتصفه هي نقطة الأصل.

الفصل الرابع

المفاهيم Concepts

- (1-4) مقدمة
- (2-4) المفهوم
- (3-4) تكوين المفهوم
- (4-4) تصنيفات أخرى للمفاهيم
- (5-4) تصنيفات المفاهيم حسب وظيفتها
- (6-4) أهمية استخدام المفاهيم
- (7-4) استراتيجيات تدريس المفاهيم
- (8-4) درس نموذجي في تقديم المفهوم

الفصل الرابع المفاهيم

(1-4) مقدمة

لعل أهم ما يميز الرياضيات الحديثة عن غيرها من العلوم أنها ليست مجرد عمليات روتينية أو مهارات بل هي أبنية محكمة يتصل بعضها ببعض اتصالاً وثيقاً مكونة في النهاية بنياناً متكاملأً واللبنات الأساسية في هذا البناء هي المفاهيم، فعند دخول التلميذ المدرسة يقوم بدراسة مفردات أو رموز معينة مثل الأعداد، الطول، الجمع، الطرح، القسمة، الترتيب وتبدأ عملية التعلم لدى التلميذ عن طريق التعرف على هذه المعاني أو المفردات أو الرموز الجديدة بالنسبة له ومن ثم عملية تمييزها عن غيرها بحيث يصبح قادراً على التمييز بين النقطة والمستقيم وبين المثلث والمربع والمستطيل وغيرها من المصطلحات. وعندما يقوم المعلم بتدريس مثل هذه الكلمات أو المصطلحات أو المعاني فإنه يقوم بتدريس المفاهيم.

[وتظهر أهمية تدريس المفاهيم في أن التعميمات والمهارات الرياضية تعتمد اعتماداً كبيراً على المفاهيم في تكوينها واستيعابها واكتسابها وتحويلها، كذلك فإن تقدم التلميذ وتحصيله الدراسي في الرياضيات يعتمد اعتماداً كبيراً على مدى ما لديه من مفاهيم رياضية مكتسبة.]

والمفاهيم تمكن الشخص من التعلم والتمييز وتسمية الأشياء بمسمياتها المناسبة بحيث يستطيع نقل أفكاره إلى الآخرين⁽¹³⁾.

لذلك كان لابد من التعرف على أهمية المفاهيم وأنواعها وطرق تدريسها بما يحقق أهداف تدريس الرياضيات وأن يدرك الطالب المعلم هذه الكائنات الرياضية ويكون ملماً بأصول تدريسها.

(2-4) المفهوم

الحقيقة أنه لا يوجد تعريف جامع أو متفق عليه للمفهوم ولكن ذلك لا يمنع من وجود تعريفات مختلفة للمفهوم تحقق الهدف منها.

تعريف هندرسون⁽⁶⁷⁾

1 - «المفهوم هو الصفة المجردة المشتركة بين جميع أمثلة ذلك المفهوم» أي أن المفهوم يوجد حيث يوجد شيئان أو أكثر متميزان أو حيثما توجد حوادث مصنفة معاً ومنفصلة عن الأشياء الأخرى على أساس بعض الملامح المشتركة بينها أو وجود الخاصية المشتركة لها، ويمكن وضع الحوادث أو الأشياء ضمن فصيلة واحدة على أساس صفاتها المعيارية وتعطى هذه الفصيلة اسماً هو في العادة مصطلح المفهوم.

فمجموعة الأشكال التي هي عبارة عن ثلاثة أضلاع متقاطعة متشابهة متشابهة تتسبب إلى مفهوم المثلث ولكن كون هذا المثلث صغيراً أو كبيراً، متساوي الأضلاع، حاد الزوايا، مختلف الأضلاع، مثلث من خشب أو مثلث من حديد هذه القيم لا تبعدنا عن مفهوم المثلث لهذه الأشكال فالصفة المجردة هي وجود ثلاثة أضلاع بينما إذا كان هذا الشكل يحوي أربعة أضلاع، فالمفهوم يتحول إلى الشكل الرباعي، ولا يهمنا إن كان هذا الشكل مربعاً أو معيناً أو مستطيلاً فهذه تصنيفات للشكل الرباعي وهكذا.

2 - المفهوم الرياضي قاعدة لاتخاذ قرار أو حكم عندما تطبق على مواصفات أو خصائص شيء ما نستطيع أن نحدد فيما إذا كان بالإمكان إعطاء التسمية (المصطلح) لذلك الشيء أو عدم إعطائه هذه التسمية⁽³⁴⁾، فالخصائص التي تميز المستطيل مثلاً هي التساوي في الأضلاع المتقابلة وكذلك الزوايا الأربع متساوية وقياس كل منها (90°).

والخصائص التي تميز الشكل السداسي المنتظم هي وجود ستة قطع مستقيمة

متساوية في الطول ومتقاطعة متنى متنى وكذلك تكون قياسات زواياه متساوية قياس كل منها (120°).

3 - المفهوم زوج مرتب ذي بعدين، الأول يمثل العبارة التي تحدد المفهوم أو الاسم (المصطلح) الذي يطلق عليه المفهوم والمسقط الثاني يمثل القاعدة التي تستخدم في تحديد أو استعمال هذه العبارة.

فعندما يكون المسقط الأول أي المصطلح أو المفهوم هو القطع الناقص فيكون المسقط الثاني «المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البورتين) يساوي مقدار ثابت».

4 - المفهوم الرياضي تجريد ذهني لخصائص مشتركة لمجموعة من الظواهر أو الخبرات أو الأشياء حيث تعزل هذه الخاصية مما يحيط بها في أي من المواقف المعينة وتعطي اسماً يعبر عنه بلفظ أو رمز، فخاصية الاثنية مثلاً ما هي إلا تجريد عقلي للخاصية المشتركة الموجودة في مواقف مثل العينين أو القدمين أو الذراعين أو الزوجين أو الأبوين.. والتي نسميها اثنان ونعبر عنها بنفس اللفظة أو بالرمز «2» ومع تجريد هذه الخاصية فإن المفهوم «2» لا شأن له بالعينين أو القدمين أو الذراعين أو أي من المواقف الخاصة التي من بين خواصها أنها اثنان (51).

ولما كان المفهوم تجريد ذهني لخصائص مشتركة لمجموعة من الأشياء فإنه يجب التمييز بين المفهوم كتكوين عقلي مجرد أي داخل التصورات العقلية وبين المفهوم كتكوين محسوس مثل الكرسي أو الكتاب أو القلم.. فمفهوم الكرسي أو الكرسيه هو تجريد للأشياء التي تتميز بوجود قاعدة وثلاثة أو أربع أرجل وقد يكون الكرسي من الخشب أو الجلد أو الحديد وقد يكون مريحاً أو غير مريح.

تعريف ميريل

المفهوم مجموعة من الأشياء المدركة بالحواس أو مجموعة من الأحداث

أو عبارة معينة عن شيء معين تكون لدى الفرد أو الأفراد مفهوماً عن هذا الشيء⁽⁵⁾.

ولما كانت الكلمات عبارة عن مجردات وبالتالي فإنها تحمل من المعاني والفهم بالنسبة للفرد بقدر ما يتوفر لديه من العاملين الأساسيين التاليين :

أ - مستوى النضج

هذا العامل يحدث نتيجة للتكوين الوراثي للفرد ولا يحتاج إلى تمرين أو تدريب أو ملاحظة، فالمشي عند الأطفال نتيجة نضج وليس نتيجة لتعلم، فالطفل يمشي نتيجة لبلوغ جهازه العضلي وجهازه العصبي درجة من النضج، وكذلك هناك مجموعة من القدرات في مجال النمو العقلي والانفعالي تنمو بتقدم الطفل في العمر⁽²¹⁾.

لذلك فالأفراد يتميزون من حيث مستوى النضج وبالتالي انعكاس ذلك على اكتسابهم للمفاهيم.

ب - الخبرات المتوفرة

فالأفراد يختلفون فيما بينهم من حيث الخبرة المتوفرة لديهم، فالكلمة الواحدة لا تعني لجميع الأفراد معنى واحد أو بعبارة أخرى يختلف الأفراد في مستويات الإدراك والفهم والمعنى، وعلى ذلك فالمفهوم ليس شيئاً ثابتاً تماماً في ذاته منذ بداية تعلمه وإنما هو ينمو من خلال نضج الأفراد ونمو خبراتهم.

وتنمو المفاهيم وفق نظام تتابعي وهذا المبدأ (النظام التتابعي) متبع في تدريس الرياضيات والعلوم والاجتماعيات وذلك بهدف اكتساب المعرفة.

ولقد أوضحت الكثير من الدراسات أن بعض المفاهيم تنمو مبكراً وبعضها يبدأ في الظهور متأخراً مع نمو مفاجئ سريع وبعضها ينمو بالتدريج خلال فترة زمنية طويلة نسبياً.

على أنه يبقى أن مستوى الفهم عند طفل معين يتناسب مع عدد الخبرات التي مر بها وأنواعها فيما يتصل بهذا المفهوم⁽¹³⁾.

والخبرات التي تمثل هذا المفهوم تعتبر أمثلة إيجابية له أما الخبرات التي لا تمثلها فهي أمثلة سالبة لهذا المفهوم.

ولتكوين المفهوم يجب أن تتوافر لدى الفرد سلسلة من الخبرات المتشابهة في جانب أو أكثر، كذلك يجب أن يسبق سلسلة الخبرات التي تحتوي المفهوم أو يلحق بها أو يتخللها أمثلة سلبية أيضاً لضمان تعلم هذا المفهوم على نحو سليم.

وعلى ذلك يمكن أن نخلص إلى أن تكوين المفهوم لدى الفرد يعتمد على:

- 1 - مستوى نضج الفرد.
- 2 - تقسيم الأشياء وفق التشابهات.
- 3 - تقسيم الأشياء وفق الاختلافات.
- 4 - التمييز بين الأشياء من حيث الاختلافات والتشابهات⁽⁴⁵⁾.

فعلى سبيل المثال إذا أردنا أن نعلم التلميذ مفهوم اتصال دالة عند نقطة معينة يجب أن نوضح له بالأمثلة المختلفة الموجبة والسالبة لهذا المفهوم فتقدم له أمثلة لدوال متصلة عند نقطة وأمثلة لدوال غير متصلة (منفصلة) عند نقطة وكذلك أمثلة للمقارنة أو التمييز بين دوال من حيث اتصالها أو عدم اتصالها عند نقطة معطاة مع مراعاة أن تقديم مثل هذا المفهوم للتلميذ يجب أن يكون متفقاً مع مستوى نضجه العقلي لتقبل مثل هذه المفاهيم.

وعندما يستطيع التلميذ أن يكتب تعريفاً سليماً لاتصال دالة عند نقطة وأن يحدد ويميز الدوال المتصلة عن غيرها من الدوال غير المتصلة عند هذه النقطة وعندما يتمكن التلميذ من التعرف على الدوال المتصلة من خلال الصورة العامة لها كما وأنه يستطيع أن يحدد القيمة أو القيم التي تجعل دالة ما متصلة عند نقطة ما فإننا نقول أن مفهوم اتصال دالة عند نقطة قد تكون لدى التلميذ.

ب - مفاهيم ثانوية (عليا)

تلك المفاهيم المشتقة من المفاهيم الابتدائية عن طريق الربط بعلاقات رياضية أدت إلى تركيب المفاهيم الدنيا بعلاقات وخلق مفهوم جديد أعلى درجة من سابقه أو سابقاته من المفاهيم الأولية.

(4-4) تصنيفات أخرى للمفاهيم

يصنف بعض العلماء المفاهيم الرياضية في ضوء المعايير التالية :

1 - المفاهيم الدلالية Denotative Concepts

وهي تلك المفاهيم التي تستخدم للدلالة على شيء ما مثل مفهوم مستو «أي ثلاث نقط في الفراغ تحدد مستو»، مفهوم الدالة المحدودة «الدالة المعرفة على [أ، ب] والمتصلة على هذه الفترة تكون محدودة». ومفهوم الدالة الأحادية، حاصل الضرب الديكارتي، مفهوم التطابق بين مثلثين ومفهوم العدد الطبيعي والمصفوفة المربعة والعدد الحقيقي... والمفهوم الدلالي هو المفهوم الذي مجموعة الإسناد أو المرجع له (مجموعة الأشياء التي يحددها المفهوم) ليست المجموعة الخالية.

وتقسم المفاهيم الدلالية إلى قسمين :

أ - مفاهيم حسية (محسوسة) Concrete Concepts

وهي المفاهيم التي عناصرها تمثل مجموعة أشياء مادية أي أشياء يمكن ملاحظتها وقياسها أو يمكن تمثيلها بنموذج في العالم الخارجي (الملموس أو المادي المحسوس)⁽³⁾ مثل المسطرة الحاسبة، المنقلة، الحجم، العدد الطبيعي، الكتلة، الارتفاع، القيم القصوى المحلية.

2 - مفاهيم متعلقة بالإجراءات

مثل مفهوم كل من جمع مصفوفتين، ضرب مصفوفتين، تركيب دالتين، المعكوس الضربي أو الجمعي لمصفوفة مربعة، حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد باستخدام طريقة القانون، حل جملة معادلات باستخدام المحددات.

3 - مفاهيم متعلقة بالعلاقات
وهذه المفاهيم تركز على عمليات الربط أو المقارنة بين عناصر
مجموعة أو بين عناصر عدة مجموعات مثل المساواة بين مجموعتين (فئتين)
علاقات الترتيب، شروط الحقل أو الزمرة، التشاكل بين نظامين.

4 - مفاهيم متعلقة بالبنية أو الهيكل الرياضي
مثل مفهوم كل من خاصية الانغلاق، خاصية التنسيق، خاصية العنصر
المحايد في الزمرة، المعكوس الجمعي أو الضربي، الحقل، الحلقة، القيم القصوى
المحلية أو المطلقة للدالة، الحجوم الدورانية.

ثالثاً : تصنيف هيرنباخ⁽²⁰⁾

يصنف هيرنباخ المفاهيم الرياضية إلى :

1 - مفاهيم أولية أو ابتدائية (دنيا)
وهي تلك المفاهيم المشتقة والمستمدة من خبرتنا الحسية المرتبطة بالعالم
الخارجي.

2 - مفاهيم علاقية
هذه المفاهيم تشتمل على علاقات معينة بين الأشياء كمفهوم البينية أو
الاحتواء أو الاتصال عند نقطة «تكون الدالة د (س) متصلة عند النقطة س = أ إذا
تحقق :

أ - د (أ) موجودة

ب - نها د (س) = د (أ)
س ← أ

ومن المفاهيم العلاقية أيضاً مفهوم قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة أو قابليتها
للتكامل على فترة مغلقة ومفهوم الدالة الفردية أو الزوجية.

3 - مفاهيم عامة ومفاهيم مفردة

المفاهيم العامة تلك المفاهيم التي مجموعة الإسناد لها تحتوي على أكثر من عنصر واحد مثل مفهوم العدد الطبيعي $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ والعدد النسبي $\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ مجموعة الأعداد الصحيحة، $b \neq 0$ والدالة التربيعية والدالة الخطية من الصورة $ص = اس + ب$ ، $ا \neq 0$ ، والمفاهيم المفردة مثل العدد الصحيح - 3 والدالة الخطية المعلومة $ص = 2س + 5$ والعدد غير النسبي $\sqrt{2}$. ونجد أن مجموعة الإسناد للمفاهيم المفردة تحتوي على عنصر واحد فقط.

ثانياً : تصنيف جونسون ورازينج⁽⁴⁹⁾

يصنف جونسون ورازينج المفاهيم إلى أربعة أقسام :

1 - مفاهيم متعلقة بالمجموعات

ويتم التوصل إليها من خلال تعميم الخصائص أو الصفة المميزة على الأمثلة أو الحالات الخاصة الواردة مثل مفهوم العدد النسبي والمربع وكثيرات الحدود.

(4-5) تصنيفات المفاهيم الرياضية حسب وظيفتها

يصنف العلماء المفاهيم الرياضية حسب وظيفتها أو صفاتها أو حسب العمليات المتعلقة بها، وسنوضح ذلك :

أولاً : تصنيف برونر⁽³⁴⁾

يصنف برونر المفاهيم الرياضية إلى أربعة أقسام :

1 - مفاهيم ربطية

حيث تستخدم أدوات الربط مثل «و» أي تذكر أكثر من خاصية واحدة في الأشياء التي تقع ضمن إطار هذا المفهوم مثل مفهوم المعين والزمرة والحقل، فعندما نعرف مفهوم متوازي الأضلاع مثلاً نقول «شكل رباعي مستو فيه كل ضلعين متقابلين متساويين وكل زاويتين متقابلتين متساويتين».

ومفهوم تقاطع مجموعتين نقول «مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى وتنتمي إلى المجموعة الثانية».

2 - مفاهيم فصلية

والتي تستخدم فيها أداة الربط «أو» أي يتوفر فيها خاصية واحدة من بين عدة خصائص أو صفات مثل مفهوم الاتحاد بين مجموعتين، نقول «مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى أو تنتمي إلى المجموعة الثانية».

كذلك مفهوم العدد الصحيح غير السالب $0 \leq$ بمعنى أن هذا العدد يكون أكبر من الصفر أو يساوي الصفر.

ب - مفاهيم مجردة Abstract Concepts

وهذه المفاهيم عناصرها غير محسوسة حيث لا يمكن ملاحظتها أو قياس خصائصها (خصائص عناصر مجموعة الإسناد) مثل هذه المفاهيم: العدد التخيلي، الدالة، الجذر التربيعي، الجذر الأصم، ما لا نهاية.

ويقسم العلماء المفاهيم الدلالية إلى قسمين :

أ - مفاهيم مفردة

وهي تلك المفاهيم التي مجموعة إسنادها مجموعة أحادية مثل مفهوم العدد 9 والنسبة التقريبية π ونقطة الأصل (0.0).

ب - مفاهيم عامة

تلك المفاهيم التي مجموعة الإسناد لها تحتوي على أكثر من عنصر واحد مثل مفهوم العدد الطبيعي، العدد النسبي، العدد المركب، الاقتران التربيعي، كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة...

2 - المفاهيم الوصفية Attributive Concepts

تلك المفاهيم التي تحدد خصائص معينة تتصف بها مجموعة من الأشياء كمفهوم الصدق في العبارات الرياضية أو مفهوم الاتصال في الدوال أو مفهوم

الاشتقاق أو التوازي أو التعامد أو التحويلات الهندسية، ولكن لابد من ملاحظة أنه في حين أن مفهوم الصدق مفهوم وصفي فإن مفهوم عبارة صادقة مفهوم دلالي، فالصدق أكثر تجريداً من العبارة الصادقة والتوازي أكثر تجريداً من مستقيمين ل، م متوازيين والتعامد أكثر تجريداً من ل مستقيم عمود على المستوى س.

وواضح أن مجموعة الإسناد (المرجع) للمفاهيم الرياضية الوصفية هي المجموعة الخالية على أن هناك مفاهيم غير دلالية وغير وصفية وتكون مجموعة الإسناد لها المجموعة الخالية مثل مفهوم عدد زوجي أولي غير العدد 2، والجدير بالذكر أن بعض العلماء يقسمون المفاهيم الوصفية إلى مفاهيم معرفة حيث يعبر عنها بصياغات لفظية شارحة بدلالة مفاهيم أخرى أبسط منها أو سبق تعريفها أو توضيحها، كما أن هناك مفاهيم غير معرفة (لا معرفة) تقبل بدون تعريف ولكن يتم تحديد بعضها من خواصها وكيفية التعامل بها⁽⁵¹⁾.

ومن أمثلة المفاهيم غير المعرفة النقطة، المستقيم، المستوى، المجموعة (الفئة)، فعندما نقول أن الخط المستقيم هو مجموعة لا نهائية من النقط فهذا ليس تعريفاً ولكنه خاصية من خواص المستقيم كما أن النقطة ذاتها ليس لها تعريف.

ولعل وجود اللا معرفات في التراكيب الرياضية هو ميزة لطبيعة الرياضيات تميزها عن غيرها من العلوم فترك المفاهيم دون تعريف هو إعطاء الفرصة لتفسير مدلولاتها طبقاً لطبيعة التركيب الرياضي الذي سوف يستخدم، فمثلاً لفظ مجموعة (Set) مفهوم غير معرف ولكنه يفهم على أنه تجمع من العناصر المعرفة تعريفاً جيداً فإذا كان مجال الدراسة هو الجبر أو الحساب فإن العناصر تفسر على أنها أعداد وإذا كان مجال الدراسة هو الهندسة فالعناصر تفسر على أنها نقط وإذا كان مجال الدراسة هندسة التحويلات فالعناصر عبارة عن تحويلات هندسية⁽²⁹⁾.

عنها بكلمة أو رمز وبالتالي تقلل من تعقد البيئة المحيطة، فمفهوم الأسس اختصر الجملة (اثنتان وسبعون مضافاً إليها اثنتان وسبعون مضافاً إليها اثنتان وسبعون مضافاً إليها اثنتان وسبعون وهكذا اثنتان وسبعون مرة) إلى الصورة المبسطة (72) $\frac{2}{3}$

6 - المفاهيم تكون وسيلة أو أداة قياس تساعد في الحكم على مدى تمكن التلاميذ من فهم المادة الدراسية، فالتلميذ الذي يتكون لديه معنى مفكك وغير كامل وغير دقيق للمفهوم لا يمكن تطبيق هذا المفهوم على وجه الدقة ويقوده ذلك إلى تفكير سقيم وبالتالي يصعب عليه تكوين المعاني الدقيقة، فالتلميذ الذي لا يعرف خواص اللوغاريتمات وكذلك كيفية التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية لا يمكنه حل المعادلة من الصورة :

$$3 \text{ لو } 2 (3 \text{ س} - 10) = 3$$

لأنه لحل هذه المعادلة يحتاج إلى :

أ - تحويل المعادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية كما يلي:

$$3 \text{ س} - 10 = 2^3 \quad \text{أي } 3 \text{ س} - 10 = 8$$

ب - أن يعرف معنى الأس (القوة) وأن $2^3 = 8$

ج - أن يتمكن من حل المعادلة الناتجة باستخدام مفهوم المعكوس الجمعي والمعكوس الضربي للأعداد وكذلك العنصر المحايد الجمعي والمحايد الضربي.

$$3 \text{ س} - 10 + 10 = 8 + 10$$

$$3 \text{ س} = 18$$

$$3 \times \frac{1}{3} \text{ س} = 18 \times \frac{1}{3}$$

$$\text{س} = 6$$

2 - تحليل المفاهيم المركبة أو المفاهيم الثانوية أو المفاهيم المجردة إلى مفاهيم مبسطة أو أولية أو محسوسة إن أمكن.

3 - التأكد من فهم واستيعاب التلاميذ لهذه المفاهيم البسيطة والتي يعتمد عليها المفهوم الجديد.

ف عند تدريس مفهوم الحقل مثلاً يجب أن يتأكد المعلم من استيعاب التلاميذ للمفاهيم التالية (فئة، عملية ثنائية، خاصية الانغلاق، خاصية التتسيق، خاصية العنصر المحايد، خاصية المعكوس، الخاصية الإبدالية، الزمرة، الزمرة الإبدالية، خاصية التوزيع).

ويرى دينيز "Denez" أنه لا بد للمتعلم من الوقوف على المتغيرات الرياضية للمفهوم قبل أن تتم عملية التجريد، ومن الفروض التي اقترحها بشأن تكوين المفهوم الرياضي التأكيد على أن تتحقق كل المتغيرات التي يحتويها المفهوم لتأكيد الفهم⁽⁷¹⁾.

4 - تحديد الاستراتيجيات المناسبة (مجموعة التحركات التي يقوم بها المعلم أثناء الشرح) فمن المعلمين من يقدم بالتعريف الخاص للمفهوم مباشرة (تحرك التعريف) ثم يعطي أمثلة إيجابية على المفهوم (تحرك المثال) ويتبع ذلك إعطاء أمثلة سلبية (لا أمثلة) على المفهوم (تحرك اللا مثال). نرمر لهذه الاستراتيجية (تعريف، مثال، لا مثال).

ومن المعلمين من يبدأ بتتابع آخر حيث البدء بالأمثلة الإيجابية (تحرك المثال) كان يقدم مجموعة من الرسوم لدوال مختلفة تمثل دوال متصلة ثم يقدم الأمثلة السلبية (تحرك اللا مثال) حيث يقدم مجموعة من الرسوم لدوال مختلفة تمثل دوالاً غير متصلة ثم بعد هاتين الخطوتين يقدم التعريف (تحرك التعريف) حيث يقدم تعريف الاتصال أو الاتصال لدالة عند نقطة نرمر لهذه الاستراتيجية (مثال، لا مثال، تعريف). ومن المعلمين من يبدأ بتحرك الأمثلة الإيجابية

(تحرك المثال) ثم يقدم التعريف (تحرك التعريف) ثم بعد ذلك يقدم الأمثلة السلبية للمفهوم (تحرك اللا مثال) هذه الاستراتيجية نرسم لها بالرمز (مثال، تعريف، لا مثال).

والجدير بالذكر أن هندرسون عرّف الاستراتيجية التعليمية بأنها «كل مجموعة متتابعة من التحركات التي يقوم بها المعلم عند تعليم أي مفهوم تسمى استراتيجية تعليم ذلك المفهوم»⁽³⁴⁾.

ومن الاستراتيجيات المتبعة (تعريف، مثال، لا مثال)، (تعريف، مثال)، (مثال، تعريف)، (مثال، لا مثال، تعريف)، (انتفاء، عدم انتفاء، تعريف)، وسنقدم نموذجاً لخطّة متبعة لتدريس مفهوم المتراجحات باستخدام استراتيجية (تعريف، مثال) حيث يتم خلال هذه الخطّة التعرض للأهداف السلوكية، التمهيد لتقديم التعريف من خلال الأمثلة، التوصل للتعريف، تقويم تحصيل المتعلم لهذا المفهوم.

(4-8) درس نموذجي في تقديم المفهوم

المتراجحات

✓ الأهداف السلوكية

- 1 - أن يفهم الطالب المقصود بالمتراجحة من الدرجة الأولى في متغير واحد.
- 2 - أن يميز الطالب بين المتراجحة والمتساوية والمعادلة.
- 3 - أن يتمكن من حل المتراجحة من الدرجة الأولى في متغير واحد.
- 4 - أن يمثل المتراجحة من الدرجة الأولى على شكل فترة.

تقديم

إن أي مشكلة أو سؤال من خلالها (خلاله) يمكن التعبير عنها (عنه) كعلاقة أكبر من «>» أو أصغر من «<» أو أكبر من أو يساوي « $\geq$ » أو أقل من أو يساوي « $\leq$ » فإنها تحتاج إلى نظام المتراجحات (المتباينات) والمتراجحة

(المتباينة) جملة رياضية تفيد بأن كميتين غير متساويتين وتستخدم الرموز $<$ أو $>$ أو $\leq$ أو $\geq$ كما سبق معرفة هذه الرموز فعندما نريد التعبير بالرموز عن أن العدد 5 أصغر من 7 تكتب ذلك $5 < 7$ كذلك تعرضنا إلى أنه يمكن تمثيل الأعداد على خط الأعداد وكل عدد يقابله نقطة وحيدة على هذا الخط.

وعندما نريد تمثيل جملة (متراجحة) فنحن نعين جزء من خط الأعداد والذي يحوي عددًا محدودًا من النقاط.

مرحلة الكشف

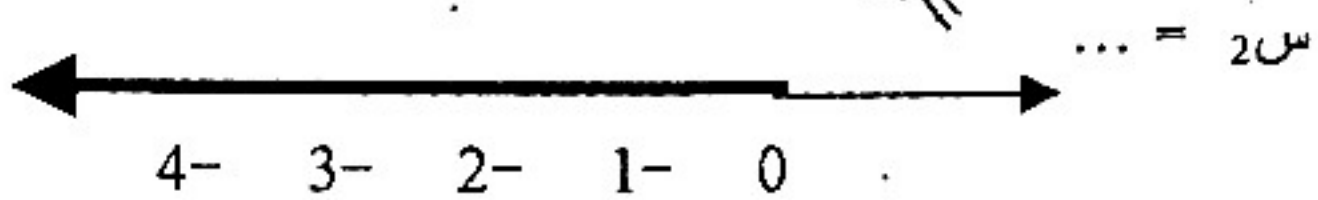
نشاط (1)

الأشكال التالية تمثل متراجحات على خط الأعداد. أوجد الجملة التي تمثل المتراجحة :

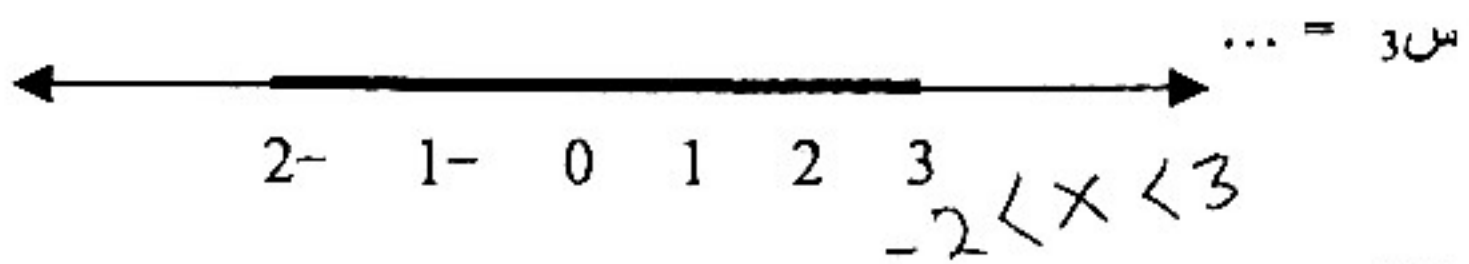
(1) $x \geq 0$



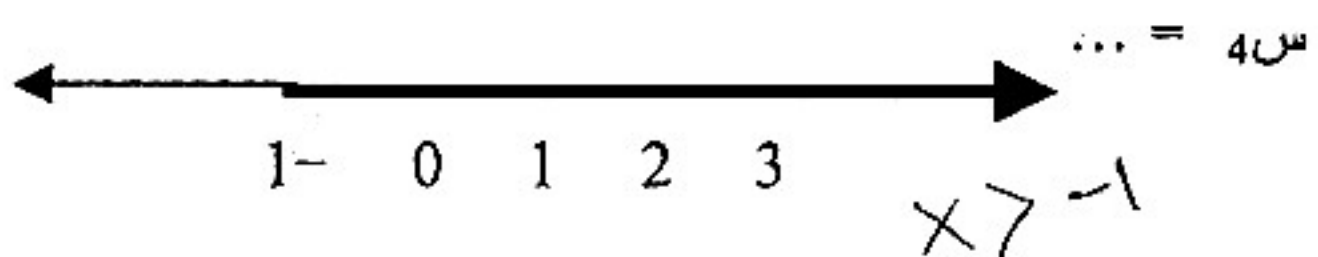
(2) $x \leq 5$



(3)



(4)



الفصل الخامس التعميمات

(1-5) مقدمة

الرياضيات هي تلك الأبنية أو التراكيب التي تتكون من مفاهيم ومسلمات ومصطلحات وخوارزميات ومشكلات رياضية وطرق برهنة ومعارف ولا معارف وقواعد وتعميمات.

ولكن ما هو المقصود بالتعميم ؟

عندما يواجه الفرد بمثير خارجي S (Stimulus) فإنه يقوم بالاستجابة لهذا المثير حسب خبراته وعندما يقوم الفرد بالاستجابة R (Response) استجابات متشابهة لمثيرات متشابهة (هذه المثيرات والاستجابات قد لا تكون متطابقة تمامًا) هذه العملية في علم النفس تسمى بالتعميم (Generalization) أو المبدأ (Principle) أو القاعدة Rule.

وعموماً فالمبدأ أو التعميم أو القاعدة هو أو هي المقدرة المستتجة التي تجعل الفرد قادراً على الاستجابة لفئة من المواقف المرتبطة بمثيرات بفئة من الاستجابات $(S \rightarrow R)$.

ويرى «جانبيه» أحد علماء النفس المشهورين أن التعميم هو علاقة بين مفهومين أو أكثر⁽⁶⁵⁾.

والجدير بالذكر أن جانبيه حدد أنماط التعلم في نسق هرمي يتدرج من أبسط أنواع التعلم وهو تعلم الإشارات إلى أكثرها تعقيداً وارتقاءً وهو تعلم حل المشكلات، وهي متدرجة كالتالي :

1 - تعلم الإشارات Signals Learning

2 - تعلم الارتباطات بين المثيرات والاستجابات Stimulus - Response.

3 - تعلم تسلسلات ارتباطية حركية Motor Chaining Learning

4 - تعلم ترابطات لفظية Verbal Association

5 - تعلم التمييز Discrimination Learning

6 - تعلم المفهوم Concept Learning

7 - تعلم القواعد والمبادئ Principles and Rules Learning

8 - تعلم حل المشكلات Problem Solving Learning

ويلاحظ أن تعلم القواعد أو المبادئ أو التعميمات تأتي في المرحلة قبل الأخيرة من الهرم وتأتي بعد تعلم المفاهيم.

والتعميم الرياضي عبارة رياضية (جملة إخبارية) تنطبق على مجموعة من الأشياء أو هو توسيع لقاعدة بسيطة لتصبح عبارة أعم وأشمل في حين تكون العبارة البسيطة حالة خاصة منها.

ويمكن [تعريف التعميم الرياضي : بأنه عبارة عن جملة خبرية تحدد علاقة بين مفهومين أو أكثر من المفاهيم الرياضية].

[والتعميمات الرياضية يتم استنتاجها أو اكتشافها والبرهنة على صحتها أو خطأها]

(ويمكن اعتبار المسلمات أو البديهيات تعميمات نسلم بصحتها بدون برهان أي أنها تمثل لا مبرهنات).

كذلك فالنظريات تعتبر تعميمات مبرهن عليها.

أمثلة لتعميمات رياضية :

1 - مجموع طولي أي ضلعين في أي مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

2 - مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي قائمتين.

3 - الدوال القابلة للاشتقاق عند أي نقطة في مجالها تكون متصلة عند هذه النقطة (نظرية).

- 4 - من نقطة خارج مستقيم معلوم يمكن رسم مستقيم يوازيه (مسلمة).
- 5 - أي نقطتين في المستوى يمكن أن يمر بهما مستقيم واحد (مسلمة).
- 6 - يمكن رسم دائرة بمعلومية نقطة وطول نصف قطرها.
- 7 - مجموع ^{مساحتي} المربعين المنشأين على ضلعي القائمة يساوي ^{مساحة} المربع المنشأ على الوتر (نظرية فيثاغورث).
- 8 - إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فكل زاويتين متناظرتين متساويتين وكل زاويتين متبادلتين متساويتين وكل زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع مجموعهما قائمتين.
- 9 - إذا كانت الدالة d (س) متصلة على $[a, b]$ وكان $d(a), d(b)$ مختلفتين في الإشارة فإنه يوجد على الأقل عدد $c \in (a, b)$ بحيث $d(c) = 0$.
- 10 - يكون النظام الرياضي (س، *) زمرة إذا كانت * عملية داخلية على س وتحقق خاصية التجميع وخاصية العنصر المحايد وخاصية المعكوس بالنسبة للعملية *.
- 11 - إذا كانت كل من الدالتين f, g (س)، h (س) قابلتين للاشتقاق عند النقطة س فإن الدالة d (س) $= f - g$ (س) $+ h$ (س) تكون قابلة للاشتقاق عند س.
- 12 - إذا كانت الدالة d معرفة على الفترة $[a, b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على الفترة (a, b) وكانت تحقق:

$$d'(x) < 0$$
 لكل $x \in (a, b)$ فإن الدالة d (س) تكون متزايدة فعلاً في $[a, b]$.
 كذلك فالقوانين والمبادئ الرياضية هي تعميمات رياضية ومن أمثلتها:

13- معادلة القطع الناقص :

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

14- حل المعادلة التربيعية $أس^2 + ب س + ج = 0$ هو

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4ج}}{2}$$

15- $(ب \wedge ج) \sim (ب \vee ج) \Leftrightarrow ب \sim ج$

16- قانون التوزيع لعملية الضرب على عملية الجمع

لكل أ، ب، ج، $\exists$ ح «مجموعة الأعداد الحقيقية»

$$أ \times (ب + ج) = (أ \times ب) + (أ \times ج)$$

17- $\frac{د(س)}{د(س)} = 1$ | $س - س = 0$ نها $د(س) - (س + هـ) = 0$

18- $ل(ب \times ج) = ل(ب) \times ل(ج)$

(2-5) أنواع التعميمات

تقسم التعميمات إلى قسمين (التعميم الكلي - التعميم الجزئي).

أولاً : التعميم الكلي

(وهو عبارة عن قضية تكون مسورة سوراً كلياً أي تعميماً كلياً ونعبر عن

ذلك بالجملة الرياضية :

$\forall س : ب(س)$ وتقرأ لكل س تنتمي إلى الفئة س تكون القضية ب(س) قضية صادقة.

من الأمثلة على ذلك :

1 - جميع الاقترانات كثيرة الحدود تكون قابلة للتكامل على الفترة المعطاة.

2 - لكل أ، ب، ج، $\exists$ ح مجموعة الأعداد الحقيقية.

$$(أ \times ب) \times ج = أ \times (ب \times ج) \text{ خاصية التجميع.}$$

3 - كل الأعداد الصحيحة تمثل أعداد حقيقية « ٧ س ٣ ص : س ٣ ح ».

4 - لكل س، ص ٣ ح، ص $\neq 0$

$$\text{لوم} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لوم س} - \text{لوم ص}$$

وقد لا يذكر أحياناً في التعميم لفظ لجميع أو لكل ولكن يفهم من سياق الألفاظ المستخدمة.

5 - الدالة المحدودة والمطرودة على [أ، ب] تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

6 - الزاوية المرسومة في نصف دائرة تكون قائمة.

ثانياً : التعميم الجزئي أو السور الوجودي أي العبارة المسورة جزئياً ويستخدم الرمز E أو لفظ يوجد أو بعض والتعبير الرمزي لذلك E س ٣ س : هـ (س)، أمثلة على ذلك :

1 - بعض الدوال المتصلة تكون غير قابلة للاشتقاق.

2 - توجد تحويلات هندسية تمثل تحويل تقايس.

3 - بعض الدوال التربيعية لها جذران تخيليان.

(3-5) تعلم التعميم أو القاعدة

المقصود بذلك عملية الربط بين مفهومين أو أكثر بحيث يتمكن المتعلم من الاستجابة لأوضاع مختلفة بناءً على مبدأ أو قاعدة معينة ولتحقيق ذلك ينبغي توفر بعض الشروط:

أولاً : الشروط الداخلية

1- توفر البنية المعرفية والحصيلة المفهومية المناسبة لدى المتعلم.

2- تمكن المتعلم من القيام ببعض المهارات المعرفية والعقلية.

3- توافر الدافعية المناسبة.

ثانيا : الشروط الخارجية

- 1 - معرفة المتعلم بالأهداف المتوقعة إيجازها.
- 2 - تقديم المفاهيم ذات العلاقة في إطار يتناسب مع البداية المعرفية للمتعلم.
- 3 - تقديم القاعدة أو التعميم بالطريقة المناسبة مثل العرض أو الاكتشاف مع استخدام استراتيجيات المثال والمثال.
- 4 - استبعاد التفاصيل المشتقة والتي يشوبها الغموض.
- 5 - تقديم بعض المثيرات اللفظية لإثارة المتعلم لاسترجاع مكونات المفاهيم التي تتضمنها القاعدة أو التعميم.
- 6 - إتاحة الفرصة المناسبة لتطبيق المبدأ أو القاعدة في سياقات جديدة.
- 7 - تقديم التعزيز المناسب والتغذية الراجعة المناسبة.

والجدير بالذكر أن مجرد تسميع القاعدة لا يدل على أن الفرد قد تعلمها وإنما يدل على ذلك القيام بالأفعال الصحيحة التي تتعلق بها وقد ينشد التلاميذ في الفصل قواعد النحو ويكتبون مخالفين لهذه القواعد وينقلون القوانين العلمية نقل مسطرة ويلفون تجاربهم العلمية لكي تتفق مع هذه القواعد ويحفظون النظريات أو النقد الأدبي ولكنهم يعجزون عن حل المسائل الرياضية⁽¹³⁾.

إذن يعتبر تعلم المبادئ والقواعد وثيق الصلة بحل المشكلات ويزودنا «جانيه» بخمس قواعد تعليمية تيسر تعلم القواعد أو التعميمات :

- 1 - تزويد المتعلم بمعلومات عن طبيعة التعلم الناجح.
- 2 - مساعدة المتعلم على تمييز المكونات الأساسية للمفاهيم.
- 3 - تزويد المتعلم بتعليمات وتوجيهات لفظية تيسر تكوين سلاسل من المفاهيم المناسبة.
- 4 - استخدام أسئلة موجهة تشجع المتعلم على أن يوضح القاعدة أو المبدأ.
- 5 - تشجيع المتعلم على أن يقدم أوصافاً لغوية للقاعدة بمعنى أن يصيغ القاعدة لغوياً.

ويمكن تعلم المبدأ أو التعميم أو القاعدة من خلال عمليات الاستقصاء العلمي ودروس الاكتشاف الموجه والمناقشات الجماعية وعمليات الاستقراء الصحيحة واستخدام استراتيجيات حل المشكلة.

(4-5) تقويم اكتساب التعميم

لكي يتمكن المعلم من تقويم أداء تلاميذه على مدى اكتسابهم للتعميم وقدرتهم على استخدامه فإنه من الممكن اعتماد نموذج «ديفيس» في اكتساب التعميم ويشمل هذا النموذج التحركات في مستويين⁽⁶¹⁾:

المستوى الأول :

فهم المعنى المتضمن في التعميم من حيث :

- 1 - فهم المفاهيم والمصطلحات الواردة في التعميم.
- 2 - صياغة التعميم بلغة التلميذ الخاصة.
- 3 - إيراد أمثلة وحالات خاصة عن التعميم.
- 4 - ذكر الشروط الضرورية لاستخدام التعميم.
- 5 - استخدام التعميم في حالات خاصة وبسيطة.

المستوى الثاني :

تبرير التعميم واستخداماته من حيث :

- 1 - بيان صحة التعميم أو برهنته.
- 2 - استخدام أمثلة عددية ومادية لتوضيح التعميم.
- 3 - التعرف على استخدامات التعميم في مواقف غير مألوفة.

ولنطبق نموذج «ديفيس» من خلال المثال التالي:

استخدم نموذج «ديفيس» لتقويم مدى اكتساب التلاميذ للتعميم «إذا كان ق اقترانا (دالة) متصلاً (متصلة) على الفترة [أ، ب] وكان ق (أ)، ق (ب) مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد على الأقل عددًا ج د (أ، ب) بحيث يكون ق (ج) = صفر.

الخطوات المتبعة :

المستوى الأول :

1 - فهم المفاهيم والمصطلحات الواردة في التعميم
اقتران (دالة)، فترة [أ، ب]، ق (أ)، ق (ب)، مختلفين في الإشارة،
يوجد على الأقل، ق (ج) = 0، اتصال دالة على فترة.

2 - صياغة التعميم بلغة التلميذ الخاصة
لدينا الاقتران أو الدالة المعرفة على الفترة المغلقة [أ، ب] ومجالها
المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية وكانت هذه الدالة تحقق الشرط إن
إشارة ق (أ) مخالفة لإشارة ق (ب) بمعنى أن إحداهما موجبة
والأخرى سالبة فإنه لا بد من وجود قيمة واحدة على الأقل لتكن ج
تنتمي إلى الفترة المفتوحة (أ، ب) بحيث تكون قيمة الدالة عند ج
تساوي صفر.

أي أن ج - يعتبر جذراً (صفرًا) للدالة.

3 - إيراد أمثلة وحالات خاصة عن التعميم

مثال (1)

$$R \leftarrow [1, 1-] : ق$$

$$ق (س) = س^3$$

مثال (2)

$$R \leftarrow [4, 1-] : ق$$

$$ق (س) = س^3 - 3س.$$

4 - ذكر الشروط الضرورية لاستخدام التعميم

أ - الدالة متصلة على فترة مغلقة [أ، ب]

ب - ق (أ)، ق (ب) مختلفين في الإشارة.

5 - استخدام التعميم في حالات خاصة وبسيطة
يمكن للمعلم أن يسأل التلاميذ أن يحسبوا أصفار (جذور) الدالة المعطاة
على فترة مغلقة معلومة.

المستوى الثاني

1 - يمكن من خلال الرسم البياني لدالة معلومة معرفة على فترة
مغلقة وهي متصلة على هذه الفترة نتصور أننا تحركنا من النقطة التي تمثل قيمة
الدالة عند أ نجد إشارتها سالبة مثلاً ولكي نصل إلى النقطة التي تمثل قيمة الدالة
عند ب والتي نجد إشارتها موجبة نلاحظ أننا لابد أن نقطع المحور السيني في
نقطة لتكن جـ مثلاً معنى ذلك أن ق(جـ) = صفر.
وأحياناً يكون العكس نبداً من ق (أ) تكون موجبة أي أعلى المحور السيني ثم
نقطع المحور السيني في نقطة أو أكثر (حسب حالة الدالة) لنصل إلى النقطة التي
تمثل ق (ب) حيث إشارتها سالبة.

2 - استخدام أمثلة عددية ومادية لتوضيح التعميم

مثال :

$$R \leftarrow [3, 1-]$$

$$د(س) = 2س + 1$$

لاحظ أن الفروض (الشروط) الثلاثة لهذه النظرية (بلزانو) كافية وغير
لازمة، بمعنى أنه يمكن إيجاد دالة متصلة على فترة مغلقة [أ، ب] ولكن د(أ)،
د(ب) غير مختلفين في الإشارة وتحقق وجود نقطة جـ بحيث د(جـ) = 0.

مثال :

$$R \leftarrow [4, 1-]$$

$$د(س) = 2س^2. \quad \text{حيث جـ} = 0 \in (1-, 4).$$

3 = التعرف على استخدامات التعميم في مواقف غير مألوفة مثل:

- 3 - استخدام عبارات لفظية أو رموز (كالأمثلة والأسئلة) تقود المتعلم لدمج سلاسل المفاهيم اللازمة لتكوين المبدأ أو التعميم.
- 4 - يطلب من المتعلم وصف حالة أو أكثر من الحالات التي تنطبق على التعميم وتكون مثالاً عليه.
- 5 - يطلب من المتعلم وصف التعميم أو المبدأ وعمل صياغة لفظية له.
- 6 - يتم التتابع السابق عادة بطريقتين:
 - أ - طريقة العرض (الشرح أو التفسير).
 - ب - طريقة الاكتشاف الموجه.

ويضيف فريد أبو زينة : أنه يمكن زيادة قدرة التلاميذ على التعميم باتباع تدريب معين كما طبقه ويلز (1961) على التلاميذ لمدة أسبوعين وذلك وفقاً للخطوات التالية :

- 1 - تجميع البيانات عن حل مسائل و أمثلة مساعدة.
- 2 - تنظيم الجداول وذلك يساعد على التعميم.
- 3 - إيجاد نظام أو نموذج واختباره بعدة أمثلة.
- 4 - تطبيق النموذج على المسألة المحددة والتحقق من صحة الجواب.

(5-5) استراتيجيات تدريس التعميم

من التحركات المتبعة من قبل المعلمين أثناء تدريسهم للتعميمات

- 1 - تحرك التقديم
ويقصد بذلك تهيئة التلاميذ وزيادة دافعيتهم واستعدادهم للتعلم وزيادة انتباههم عن طريق ذكر عنوان الدرس أو توضيح أهداف الدرس أو التقديم لأهمية الموضوع المراد شرحه.

- 2 - تحرك الأمثلة
حيث يقوم المعلم بتقديم مثالاً أو أكثر على التعميم والمثال عموماً يمثل

حالة خاصة من الحالات التي ينطبق عليها التعميم.

فمثلاً :

$$4! = 1 \times 1 \times 1 \times 1, 3! = 1 \times 1 \times 1, 2! = 1 \times 1$$

$$\text{لوب س.ص} = \text{لوب س} + \text{لوب ص}$$

$$\text{لوب} \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لوبس} - \text{لوبص}$$

$$\text{لوب} 2 \times 6 = \text{لوب} 2 \times (3)(2) = \text{لوب} 2 \times 3 + \text{لوب} 2 \times 2$$

$$\text{لوب} 2 \times \frac{5}{3} = \text{لوب} 2 \times 5 - \text{لوب} 2 \times 2$$

3 - تحرك الأمتثلة

وهذه غالباً ما تقدم بعد تحرك الأمتثلة حيث تقدم حالات لا تنطبق على

التعميم فمثلاً : لوب س.ص $\neq$ لوب س. لوب ص

$$\text{لوب} \frac{\text{س}}{\text{ص}} \neq \text{لوبس} \div \text{لوبص}$$

4 - تحرك صياغة التعميم

حيث يساعد المعلم التلاميذ على اكتشاف الصياغة اللفظية للتعميم فعندما

يكشف التلاميذ أنه في كل مثلث أ ب ج يكون :

$$\text{قياس} > \text{أ} + \text{قياس} > \text{ب} + \text{قياس} > \text{ج} = 180^\circ$$

يمكن أن يتوصل التلاميذ إلى أن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي قائمتين.

5 - تحريك التفسير

يقوم المعلم بتوضيح المفاهيم الغامضة أو الصيغية في التعميم عن طريق

إعادة شرحها أو تقديمها بصورة مبسطة أو بطريقة أخرى حتى يتضح المعنى

للمتعلم فعندما يكون التعميم :

القطع الناقص هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون مجموع بعديها عن

نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدار ثابت هو 2 أ. يقوم المعلم بتوضيح معنى

كل من المحل الهندسي، مجموع بعديها، النقطتين الثابتتين، 2 أ سواء بالرسم أو غيره من صور التوضيح الرياضي.

وفي التطبيقات الخاصة برمي حجر من قمة برج إلى أعلى ويطلب من التلميذ حساب الزمن الذي يكون فيه الحجر على ارتفاع معين من قمة البرج فعند حل هذا التمرين يظهر لدينا قيمتين للزمن ن₁، ن₂ فيطلب المعلم من التلاميذ تفسير ذلك حيث أن الجسم (الحجر) يكون على هذا الارتفاع مرتين مرة أثناء صعوده إلى أقصى ارتفاع ومرة أثناء هبوطه من أقصى ارتفاع.

6 - تحرك التبرير Justification move

حيث يقوم المعلم بإعطاء الدليل أو الحجة التي تدعم صحة التعميم أو تجعل التعميم مقنعاً حيث أن التعميمات تكون صحيحة إذا دعت بالبرهان. فعندما نقول أن لو $1000000 = 6$ وذلك لأن لو $1000000 = 10$ ⁶ وهذا يساوي 6 لو $10 = 6 = (1) 6 = 6$ لأن لو $10 = 1$.

7 - تحرك التطبيق Application move

حيث يتم تقديم المشكلات الرياضية أو التمارين والمسائل والتدريبات المعتمدة على التعميم وهذه تتطلب من التلاميذ المهارة في اختيار التعميم المناسب.

فالتلميذ يتعرض لمجموع المتوالية الحسابية

$$جـ ن = \frac{ن}{2} [2 أ + (ن - 1) د] \text{ حيث } ن \text{ عدد الحدود}$$

أ : الحد الأول، د : الأساس

وكذلك لمجموع المتوالية الهندسية

$$جـ ن = \frac{(1 - م^{ن+1})}{1 - م} ، م \neq 1$$

حيث م أساس المتوالية الهندسية، أ الحد الأول.

ولذلك عندما يكون المطلوب إيجاد مجموع الحدود الستة الأولى للمتوالية 3، 6، 12، 24، ..

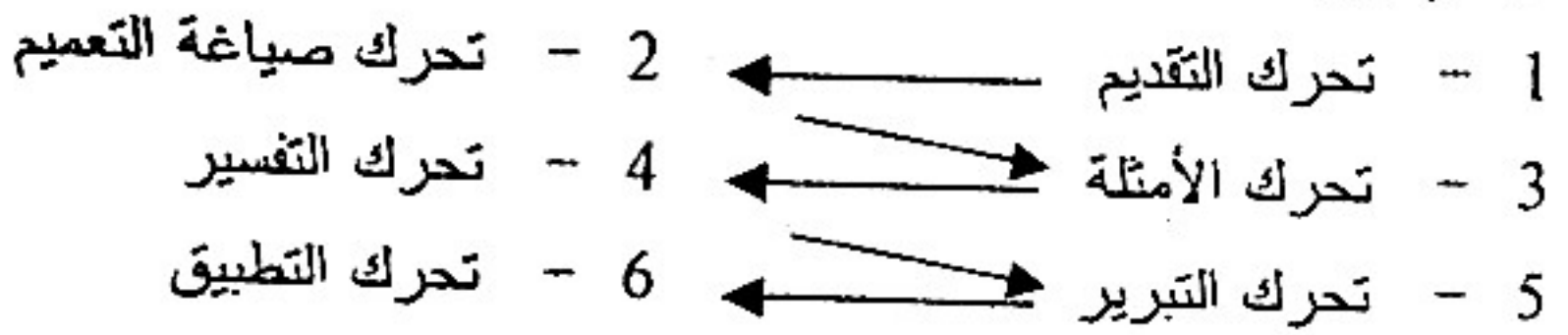
فإنه يجب أن يتعرف التلميذ إن كانت هذه الأعداد المتوالية تمثل متتالية (متوالية) حسابية أو هندسية ليتمكن من استخدام القانون المناسب لها.

وعموماً يمكن تقسيم مجموعة التحركات أو الاستراتيجيات إلى قسمين:

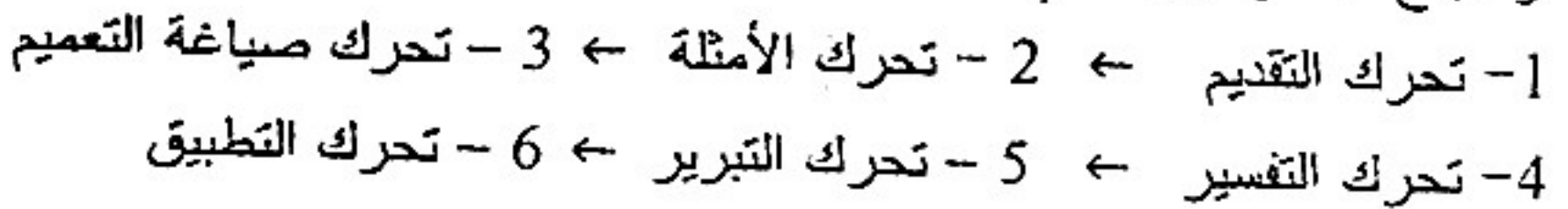
أولاً : تحركات طريقة العرض (Exposition)

من الاستراتيجيات الشائعة لتدريس التعميم الرياضي بطريقة العرض

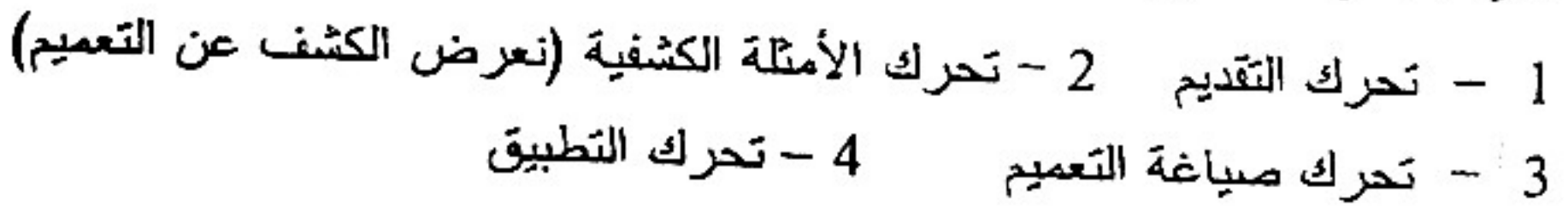
الاستراتيجية :



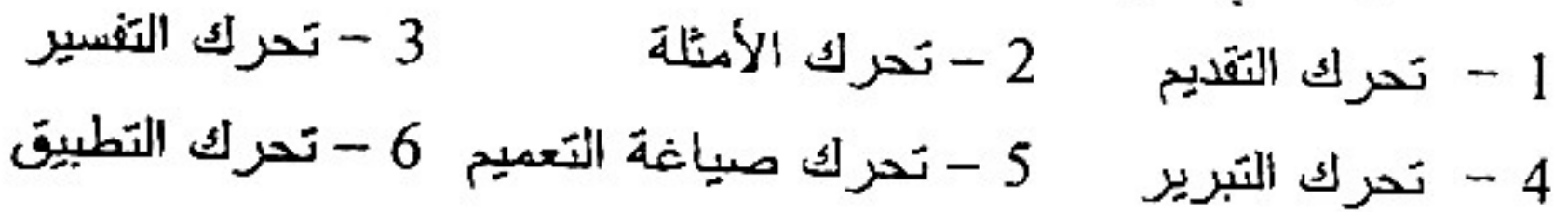
أو اتباع الاستراتيجية :



ثانياً : تحركات طريقة الاكتشاف (Discovery)



بينما في طريقة الاكتشاف الموجه تستخدم الاستراتيجية التالية :



ويمكن أن يتم ذلك عن طريق :

أ - التعميم عن طريق الأمثلة.

ب - التعميم عن طريق الأسئلة الحوارية.

ج - التعميم عن طريق الأسلوب الاستقرائي.

والأمثلة التالية توضح تلك الطرق :

مثال (1)

التعميم «مربع أي عدد فردي هو عدد فردي»

اختر الأعداد الفردية 1، 3، 5، 7، 9، ..

$$\text{نجد } 1^2 = 1 \text{ عدد فردي}$$

$$3^2 = 9 \text{ عدد فردي}$$

$$5^2 = 25 \text{ عدد فردي}$$

$$7^2 = 49 \text{ عدد فردي}$$

$$9^2 = 81 \text{ عدد فردي}$$

ما هي الصورة العامة للعدد الفردي ؟

$$\text{س } 2\text{ن} + 1 \text{ حيث ن عدد طبيعي}$$

$$\text{س}^2 = (2\text{ن} + 1)^2$$

$$= 4\text{ن}^2 + 4\text{ن} + 1$$

$$= 2(2\text{ن}^2 + 2\text{ن}) + 1$$

$$\text{حيث ل } 2\text{ن}^2 + 2\text{ن} = \text{ل} \text{ حيث ل عدد فردي.}$$

وهو يمثل عدد فردي.

مثال (2)

التعميم «المستقيم الواصل بين منتصفين ضلعين في مثلث يوازي الضلع

الثالث ويساوي نصفه».

المطلوب : إثبات أن

$$\overline{\text{هـ د}} \parallel \overline{\text{ج ب}}, \overline{\text{هـ د}} = \frac{1}{2} \overline{\text{ج ب}}$$

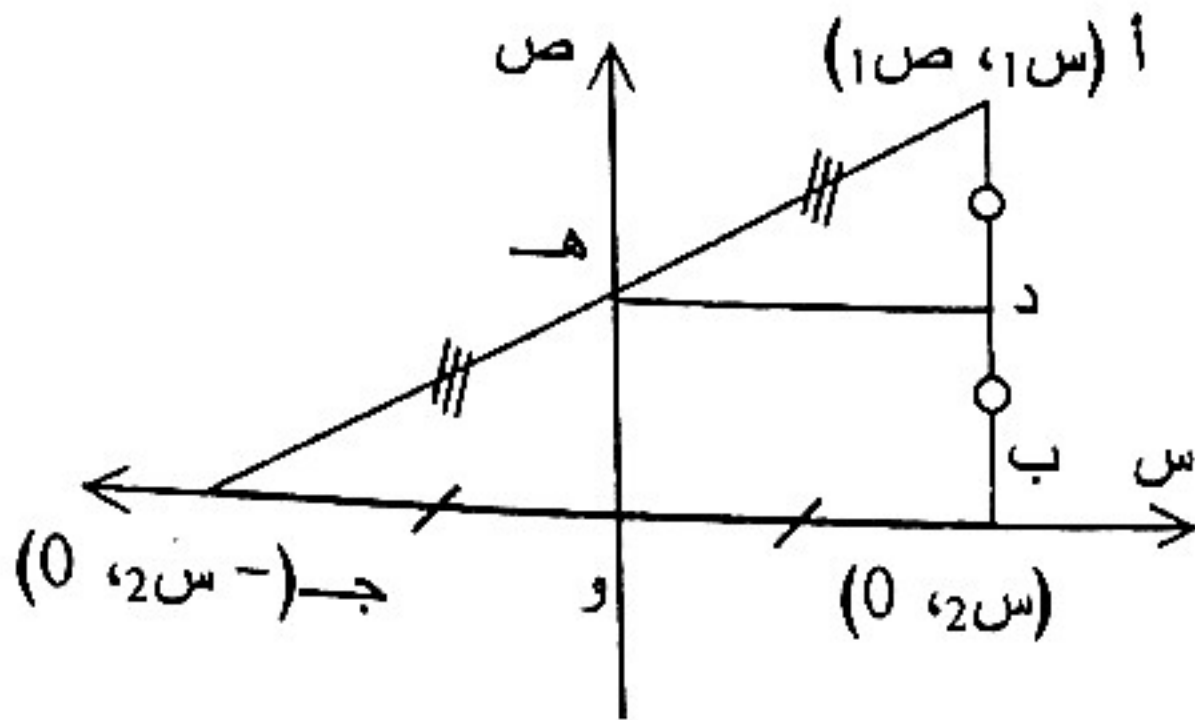
الحل :

نرسم المثلث أ ب ج بحيث ينطبق الضلع ب ج على محور السينات

وتكون منتصفه هي نقطة الأصل.

نفرض أ (س₁، ص₁)، ب (س₂، 0)،

جـ (-س₂، 0)



س₁ : منتصف $\overline{AB}$ النقطة د

ما هي إحداثياتها ؟

$$\left(\frac{ص_1}{2}, \frac{س_2 + س_1}{2} \right)$$

س₂ : ما هو ميل $\overline{DH}$ ؟

$$صفر = \frac{\frac{ص_1}{2} - \frac{ص_1}{2}}{\frac{س_2 + س_1}{2} - \frac{س_2}{2}}$$

س₃ : ما معنى ميل $\overline{DH}$ يساوي الصفر ؟

أي يوازي محور السينات أي يوازي جـ ب وهو المطلوب.

س₄ : كيف نحسب طول $\overline{DH}$ ؟

$$\overline{DH} = \frac{س_2 + س_1}{2} - \frac{س_2}{2} = س_2. \text{ لماذا ؟}$$

س₅ : كيف نحسب طول $\overline{BJ}$ ؟

$$\overline{BJ} = 2س_2 - (-س_2) = 2س_2$$

$$\therefore \frac{\overline{DH}}{\overline{BJ}} = \frac{س_2}{2س_2} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{DH} = \frac{1}{2} \overline{BJ}$$

وهو المطلوب.

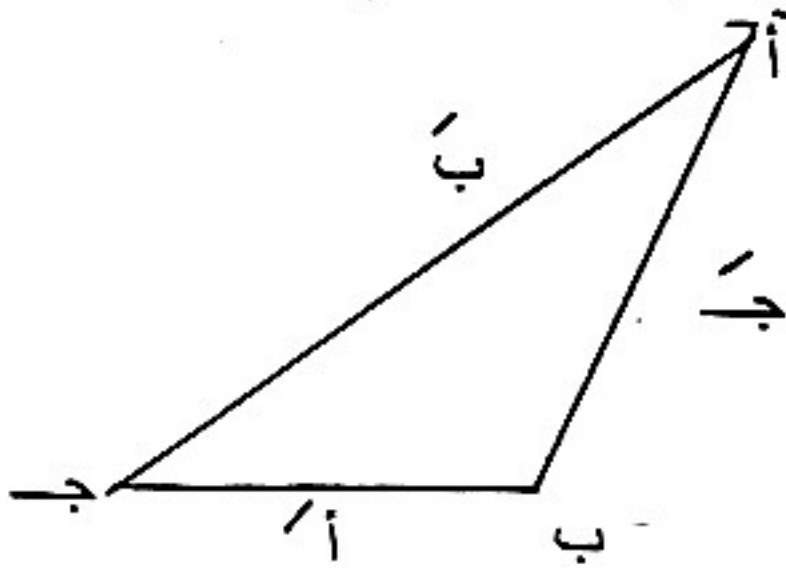
مثال (3) التعميم «في أي مثلث أ ب ج يكون $\overline{JA} = \overline{JB} = \overline{JC}$ »

«قاعدة الجيب»

يطلب المعلم من تلاميذه أن يرسموا مجموعة من المثلثات مختلفة

الأشكال ويطلب منهم :

- 1 - قياس زاوية كل من أ، ب، جـ
 - 2 - قياس أطوال كل من أ، ب، جـ
 - 3 - حساب قيمة جا أ، جاب، جـ جـ بالآلة الحاسبة.
 - 4 - حساب قيمة النسب $\frac{جـ}{جـ}$ ، $\frac{ب}{جـ}$ ، $\frac{أ}{جـ}$ والمقارنة بينهم.
 - 5 - عمل جدول خاص بالمقارنات.
 - 6 - كتابة الاستنتاج الخاص بالتعميم
- $$\frac{جـ}{جـ} = \frac{ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ}$$



برهان صحة التعميم :

نسط $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$ ، $\overline{جـد} \perp \overline{أب}$

(1) $\overline{أد} = ب \cdot جـ$ —

(2) $\overline{أد} = جـ \cdot جاب$ —

بالقسمة نحصل :

$ب \cdot جـ = جـ \cdot جاب$

(3) $\frac{ب}{جـ} = \frac{جـ}{جـ}$ —

(4) $\overline{جـد} = أ \cdot جاب$ —

(5) $\overline{جـد} = ب \cdot جا أ$ —

من 4، 5 : $أ \cdot جاب = ب \cdot جا أ$

(6) $\frac{ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ}$ —

من 3، 6

$\therefore \frac{ب}{جـ} = \frac{أ}{جـ} = \frac{جـ}{جـ}$

وهو المطلوب.

وسنوضح بالأمثلة كيفية تدريس التعميمات الخاصة بالتحويل من القياس الدائري إلى القياس الستيني والعكس من خلال تدريس القياس (الستيني - الدائري).

(5-6) درس نموذجي في تقديم التعميم

الموضوع : القياس (الستيني - الدائري)

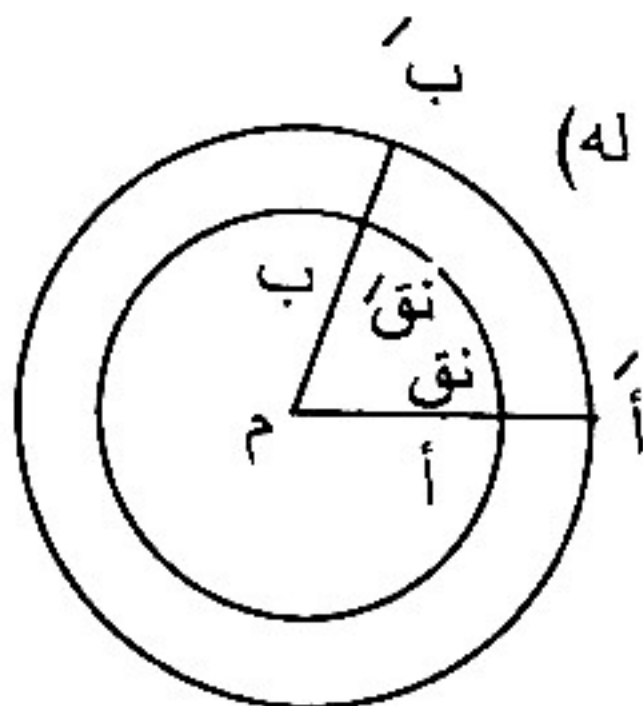
الأهداف السلوكية :

- 1 - أن يتعرف الطالب إلى وجود نوعين من القياس لقياس الزاوية وهما التقدير (القياسي) الستيني ووحدة القياس هي الدرجة والتقدير (القياسي) الدائري ووحدة القياس الراديان.
- 2 - أن يربط الطالب بين القياس الدائري الذي يعتمد على طول القوس المقابل لزاوية مركزية ومجموعة الأعداد الحقيقية.
- 3 - أن يحول الطالب قياس زاوية من التقدير الستيني إلى الدائري والعكس.
- 4 - أن يشارك الطالب في إيجاد القياس الدائري والستيني ورسم دائرة الوحدة ليثبت المفهوم لديه.

تحركات التقديم :

نشاط (1)

- 1 - ارسم دائرتين متحدتين في المركز م لتكن أطوال أنصاف أقطارهما نق، نق سم.
- 2 - ارسم نصف القطر م أ يقطع الدائرة الكبرى في أ' والدائرة الصغيرة في أ.
- 3 - ارسم نصف القطر م ب' يقطع الدائرة الكبرى في ب' والصغرى في ب.
- 4 - باستخدام خيط أو شريط أوجد طول أ ب'، أ ب.
- 5 - أكمل البيانات التالية :



(يوحد طول الخيط الممثل له)

$$\frac{\text{طول } \overline{A'B'}}{\dots} = \frac{\text{طول } \overline{AB}}{\dots}$$

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{\text{نق}}{\text{نق}}$$

ما هي العلاقة بين :

$$\frac{\text{طول } \widehat{أَب}}{\text{طول } \widehat{أَب}} ، \frac{\text{نق'}}{\text{نق}} ؟$$

هل هي (علاقة التساوي بين النسبتين) أم علاقة تراجحية ؟
أعد نفس الرسم ولكن بتغيير أطوال نصفي القطرين نق سم، نق سم، ثم أوجد:

$$\frac{\text{طول } \widehat{أَب}}{\text{طول } \widehat{أَب}} ، \frac{\text{نق}}{\text{نق}}$$

ما هي العلاقة بين :

$$\frac{\text{طول } \widehat{أَب}}{\text{طول } \widehat{أَب}} ، \frac{\text{نق'}}{\text{نق}} ؟$$

هل تغيرت العلاقة ؟

مرحلة تقديم المفهوم :

إذا كانت دائرتين متحدتين في المركز: فإن أي قوسين واقعين على الدائرتين ومحصورين بين ضلعي نفس الزاوية المركزية يتناسب طولاهما مع طولي نصفي قطري الدائرتين.

مرحلة الكشف :

نشاط (2)

لقد تعرفت في السابق إلى أن المتر هو وحدة قياس الأطوال والكيلو جرام وحدة لقياس الكتل والدرجة الستينية وحدة قياس الزاوية ولكن هناك وحدة أخرى ذات أهمية في قياس الزاوية هي «الراديان» وتعتمد هذه الوحدة على طول القوس المقابل للزاوية ولكن ما هو الراديان ؟.

للإجابة عن ذلك : استخدم الخيط والمسطرة والمنقلة في القياس.

- 1 - ارسم زاوية أ و ب في الوضع القياسي من دائرة الوحدة.
بحيث يكون طول قوسها مساوياً طول نصف قطر دائرتها.
- 2 - في زاوية أ و ب باستخدام المنقلة، ما هو قياسها

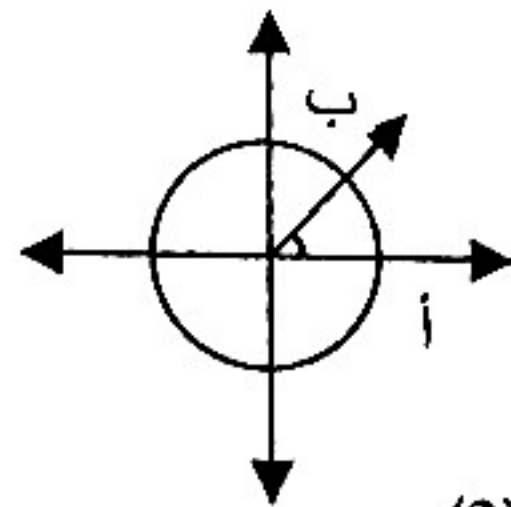
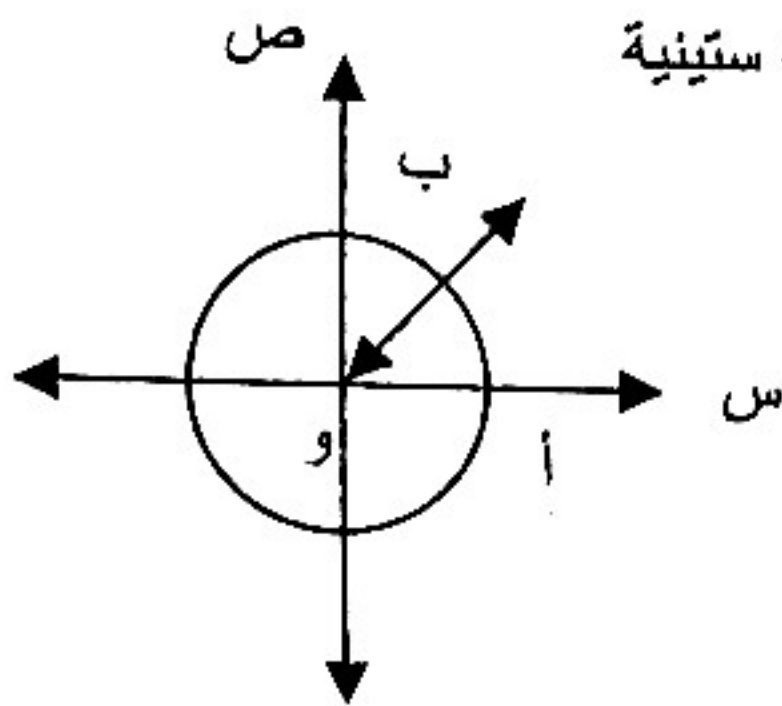
3 - ارسم مجموعة من الدوائر مختلفة في أنصاف أقطارها وارسم زاوية في الوضع القياسي بحيث يكون طول قوسها المقابل مساوياً لطول نصف قطر الدائرة ثم أوجد قياسها.

4 - ماذا تستنتج بالنسبة لقياس الزاوية بالتقدير الستيني؟

مرحلة تقديم المفهوم :

الراديان وحدة قياس الزاوية بالتقدير الدائري ويعادل بالتقدير الستيني قياس زاوية مركزية طول قوسها المقابل يساوي طول نصف قطر دائرتها.

ويكون 1 راديان = 57.27 درجة ستينية



نشاط (3)

الشكل المجاور يمثل دائرة الوحدة :

أجب عما يلي :

1 - ما هي القاعدة التي تعطي المحيط لدائرة

طول نصف قطرها نق ؟

.... المحيط = 2 ط نق

2 - ما هو محيط دائرة الوحدة ؟

... = 2 ط = 1 × 2 ط

3 - طول القوس أ ب النسبة لمحيط الدائرة = $\frac{1}{4} \times$ المحيط

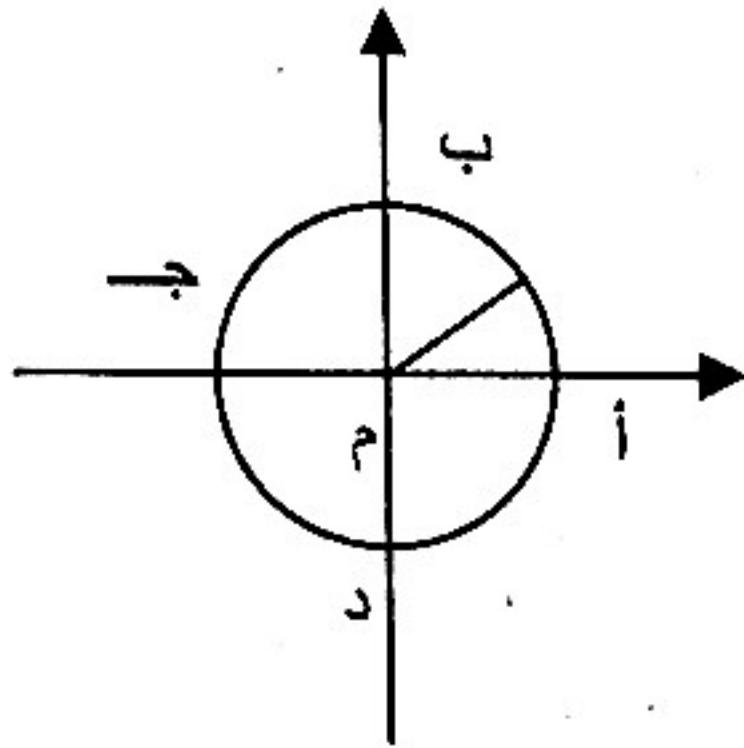
= $\frac{1}{4} \times 2 ط$

= $\frac{ط}{2}$ وحدة طول.

- 4 - طول القوس $\widehat{أ ب ج}$ بالنسبة لمحيط الدائرة = $\frac{1}{2}$ المحيط
 = $2 \times \frac{1}{2} ط$
 = ط وحدة طول
 = 3.14 وحدة طول

نشاط (4)

ارسم دائرة الوحدة مركزها يقع على نقطة الأصل في المستوى الديكارتي، نلاحظ أن الدائرة انقسمت إلى أربع أرباع، فإذا قمنا بتقسيم الدائرة إلى 360 قسمًا متساويًا كل قسم عبارة عن قوس يقابل زاوية مركزية قياسها درجة وهذه فكرة التقدير الستيني وعلى ذلك:



- 1 - القوس $\widehat{أ ب}$ يقابل زاوية مركزية قياسها 90°
 2 - القوس $\widehat{أ ب ج}$ يقابلها زاوية مركزية قياسها 180°
 3 - القوس المقابل للزاوية المركزية التي قياسها 270° هو القوس $\widehat{أ ب د}$

نشاط (5)

في الشكل المجاور الممثل لدائرة الوحدة. إذا قسمنا المحيط لدائرة الوحدة إلى 2 ط وحدة متساوية فكل جزء من هذا المحيط يقابل زاوية مركزية وعلى ذلك كما سبق يمكن قياس الزاوية المركزية عن طريق طول القوس المقابل لها على دائرة الوحدة. ويسمى الراديان ... وحدة القياس الدائري. وعلى ذلك :

س 1 : الزاوية المركزية أ م ب قياسها.

بالتقدير الستيني $90^\circ =$

وتقابل قوساً طوله $\frac{\pi}{2}$ راديان

- الزاوية المركزية أ م ج قياسها

ستيني 180° أو ط دائري ...

- الزاوية المركزية أ م ب التي قياسها بالدرجات 90° «قائمة»

يكون طول قوسها $\frac{1}{4}$ محيط الدائرة ...

$\frac{1}{4} \times 2 \pi =$...

$\frac{\pi}{2}$ راديان ...

طول قوس الزاوية أ م د $\frac{3}{4} \times$ محيط الدائرة

$\frac{3}{4} \times 2 \pi \times 1 =$

$\frac{3}{2} \pi$ راديان.

نشاط (6)

في دائرة الوحدة في النشاط السابق (5) لنأخذ زاوية مركزية ونقارن بين

التقدير الستيني والتقدير الدائري لهذه الزاوية عرفنا أن المحيط يقابل زاوية

مركزية قياسها 360° .

(أ) $360^\circ : 2 \pi$

$\therefore 180^\circ : \pi$

$\therefore 30^\circ : \pi$

س $= 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ راديان

(ب) كذلك : 180° ط

: 60° س

$$\text{س} = 60 \times \frac{\text{ط}}{180} = \frac{\text{ط}}{3} \text{ راديان}$$

(جـ) كذلك : 180° ط

: 80° س

$$\text{س} = 80 \times \frac{\text{ط}}{180} = \frac{4}{9} \text{ راديان}$$

(د) كذلك : 180° ط

: 1° س

$$\text{س} = 1 \times \frac{\text{ط}}{180} = \frac{\text{ط}}{180} \text{ راديان}$$

ثانيًا : 2 ط : 360°

(أ) ط : 180°

: $\frac{\text{ط}}{2}$ س

$$\therefore \text{س} = \frac{180}{\text{ط}} \times \frac{\text{ط}}{2} \dots = 90^\circ \dots$$

(ب) ط : 180°

: $\frac{\text{ط}}{4}$ س

$$\therefore \text{س} = \frac{180}{ط} \times \frac{ط}{4} \dots =$$

$$(ج) \quad ط : 180^\circ$$

$$\frac{ط}{9} : \text{س}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{180}{ط} \times \frac{ط}{9} \dots =$$

$$(د) \quad ط : 180^\circ$$

$$\text{س} : 1^\circ$$

$$\therefore \text{س} = \frac{ط}{180} \times 1 \dots =$$

مرحلة تقديم المفهوم :

(1) للتحويل من التقدير الستيني إلى الدائري نضرب في $\frac{180}{ط}$

(2) للتحويل من التقدير الدائري إلى الستيني نضرب في $\frac{ط}{180}$

تحركات التطبيق :

أولاً : أكمل ما يأتي:

أ - الزاوية التي قياسها 90° تقابل راديان

ب - الزاوية التي قياسها 30° تقابل راديان

ج - الزاوية التي قياسها 60° تقابل راديان

د - الزاوية التي قياسها 180° تقابل راديان

هـ - الزاوية التي قياسها 270° تقابل راديان

و - الزاوية التي قياسها 360° تقابل راديان

- س - الزاوية التي قياسها ط (راديان) تقابل درجة
 ل - الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{2}$ (راديان) تقابل درجة
 م - الزاوية التي قياسها 2 ط (راديان) تقابل درجة

ثانيًا : عبّر عن الزاوية التي قياسها 1 (راديان) بالدرجات الستينية (اعتبر ط = 3.14).

ثالثًا : عبر بالراديان عن الزاوية التي قياسها :

أ - 120°

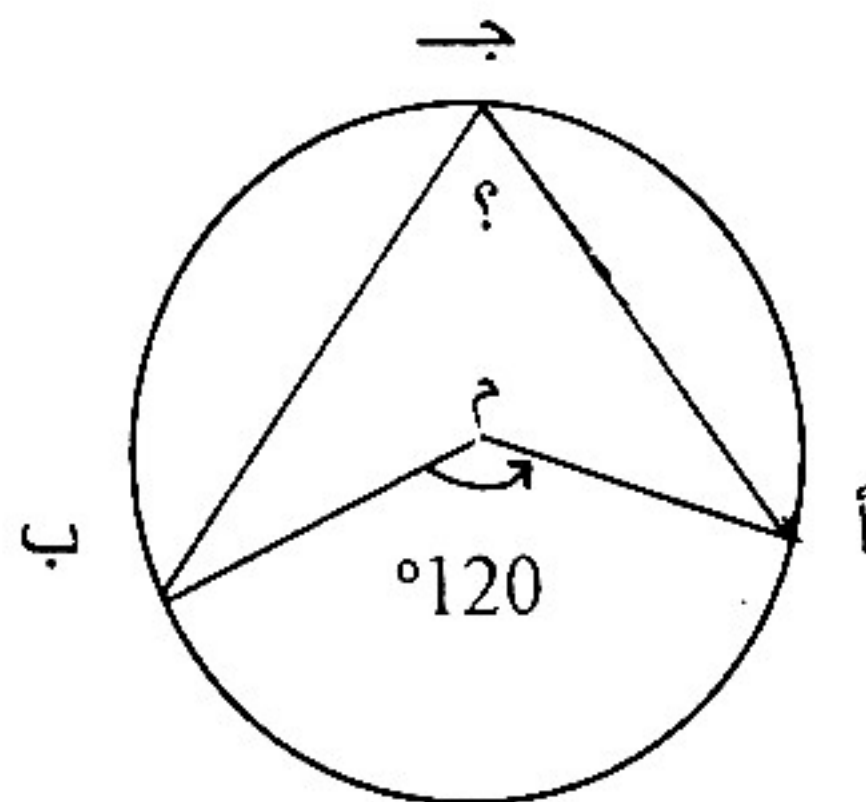
ب - 240° (بدلالة ط)

ج - 160°

رابعًا : ما هو قياس زاوية كل من المستطيل أو المربع أو المسدس المنتظم بالراديان ؟

الواجب :

- (1) كم راديان يقابل الزاوية التي قياسها 90° ؟
- (2) كم راديان يقابل الزاوية التي قياسها 270° ؟
- (3) كم درجة تقابل $\frac{\pi}{3}$ راديان ؟
- (4) في الشكل المجاور أ م ب زاوية مركزية 120° فما قياس الزاوية أ ج ب بالراديان ؟



الفصل السادس

تدريس البرهان

Teaching the Proof

- (1-6) المقدمة
- (2-6) البرهان
- (3-6) أنواع البراهين
- (4-6) استراتيجيات تدريس البرهان
- (5-6) درس نموذجي في طرائق البرهان

الفصل السادس البرهان

(1-6) مقدمة

للبرهان الرياضي دور كبير وهام في الحياة العملية للمعلمين والمتعلمين من الطلاب حيث أهميته في تنمية قدرات التفكير التقاربي والتفكير التباعدي لدى الطلاب، لذا كانت الحاجة إلى وضع أهداف عامة وأخرى خاصة تتعلق بتدريب الطلاب على البرهان وكيفية اختيار الاستراتيجيات المناسبة عند تتبع أي قضية رياضية تمثل مشكلة رياضية للوصول إلى حل لها عن طريق البرهان وكيفية التأكد من صحة هذا البرهان.

وعندما يسمع الطالب كلمة برهان "Proof" يترأود إلى ذهنه براهين النظريات الهندسية في حين أن جميع فروع الرياضيات تحتاج إلى البراهين، والواقع أن كلمة برهان أعم من ذلك فالبرهان قد يعني الاستنتاج أو الاستدلال أو التفكير المنطقي للوصول إلى الحكم على قضية معينة.

(2-6) ما هو البرهان ؟

كثيراً ما نسمع عن جمل رياضية مثل :

- أ - برهن أن مجموع زوايا المثلث الداخلة تساوي قائمتين.
- ب - «برهن أنه إذا كان المربع المنشأ على الوتر يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين فإن المثلث يكون قائم الزاوية».

ج - أثبت أن $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ حيث $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

- د - تحقق من صحة العبارة التالية لكل $\theta \in [0, \pi]$ يكون $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

هـ - «برهن أن النظام الرياضي (ح، +، ×) حيث ح مجموع الأعداد الحقيقية، +، × عمليتي الجمع والضرب العاديتين يمثل حقلاً.

مثل هذه الجمل تعني أننا نريد أن نتأكد من صحة أو صدق هذه العبارات أي إيجاد الدليل على صدقها رياضياً، والخطوات التي نقوم بها في سبيل الوصول إلى ذلك تسمى البرهان.

ويعتبر البرهان الرياضي مهارة أساسية في أسلوب حل المشكلات وأيضاً يعتبر هدفاً أساسياً لتعلم الرياضيات في المراحل التعليمية المختلفة وعندما نتحدث عن برهان نظرية فإنما نقصد مهارة البرهان الحقيقية وليس حفظ البرهان الذي يعتبر أدنى المستويات المعرفية المطلوبة من تعلم الرياضيات. وفي الحقيقة فإن برهان نظرية يعتبر مستوى عال من المستويات المعرفية العقلية والتي تساعد المتعلم على التعلم الذاتي والاعتماد على النفس في حل بعض مشكلاته الخاصة اليومية والمدرسية⁽⁴⁵⁾.

والبرهان الرياضي يعتبر من المفاهيم الأساسية في المناهج الدراسية وإن كانت طبيعة البرهان تختلف من مرحلة إلى أخرى حسب قدرات ومستويات النمو العقلي للطلاب في كل مرحلة.

ولكن ما هي المقومات التي تعتمد عليها طبيعة البرهان الرياضي :

يعبر عن ذلك (Lester, 1979) أن طبيعة البرهان الرياضي تعتمد على مجموعة من القواعد الصحيحة والمبادئ المنطقية الثابتة وذلك من خلال⁽⁷⁰⁾:

- 1 - النظام الرياضي الذي تنتمي إليه القضية موضع البرهان.
- 2 - الاستراتيجية المتبعة في الوصول إلى النتائج من المقدمات.

ويوضح تارسكي (Tarski, 1970) أن البرهان الكامل يتكون من سلسلة من القضايا تتصف بالخصائص التالية :

- 1 - أن تكون العناصر الأولى في ذلك البرهان قضايا مقبولة (صادقة).

2 - أن يتم الحصول على عنصر تال من العناصر المتقدمة باستخدام قواعد الاستدلال.

3 - أن يكون العنصر الأخير هو القضية المطلوب البرهنة عليها.

ويرى «هندام» أن معرفة طبيعة البرهان المنطقي تستلزم فهم معنى التعاريف والمسلمات والبديهيات وأهمية كل منهم في الاستدلال وفهم معنى الفروض والفرقة بينها وبين الحقائق وإدراك أهمية الفروض وتوقف صحة النتائج على صحة كل من التعاريف والفروض كما تستلزم معرفة الصور المنطقية للبرهان⁽⁵²⁾.

والبرهان يرتبط ارتباطاً مباشراً مع المفاهيم والمبادئ التطبيقية حيث يعطى للفرد مجموعة من التقارير يفترض صحتها تسمى المقدمات وعن طريق استخدام قواعد المنطق أو الاستدلال بطريقة ما يمكن أن يصل الفرد إلى جمل أخرى تسمى بالاستنتاجات (الاستدلالات) والطالب قد تعرف إلى بعض هذه المفاهيم في المراحل الدراسية مثل التقرير البسيط (القضية)، النفي، الجمل الشرطية، نفي القضايا، التضمين، التكافؤ.

ولقد أوضح كانو (Kano, 1970) أن من أكثر متطلبات البرهان الرياضي والتي اتفق عليها المناطق والرياضيون هي معرفة غير شكلية ببعض المفاهيم وقواعد المنطق الرمزي وذلك في شكل مجموعة من السلوكيات المعرفية التي يمكن للطالب أن يقوم بها وهي أن يكون الطالب قادراً على⁽⁶⁸⁾:

- 1 - أن يعطي أمثلة توضح النفي ونفي النفي والتضمين.
- 2 - أن يترجم المترجمة أ $> س$ ب إلى تقرير وصل منطقي.
- 3 - أن يترجم المصطلحات التالية :
إذا كان ... فإن ... ، إذا فقط ... ، التكافؤ ، الاستنتاج.
- 4 - أن يترجم المترجمة أ $\geq ب$ إلى تقرير فصل منطقي.
- 5 - أن يحكم على صدق كل من الوصل والفصل المنطقي.

- 6 - أن يعطي أمثلة لقاعدة القياس المنطقي.
 - 7 - أن يستخدم علاقة التكافؤ بين التقرير وعكس نقيضه في بناء البرهان.
 - 8 - أن يوضح عن طريق إيجاد الأمثلة المضادة أن $A \leftarrow B$ ، $B \leftarrow A$ غير متكافئتين في كل الحالات.
 - 9 - أن يعطي أمثلة للتقارير التي تتضمن أسواراً منطقية (مكمات منطقية).
- ولقد حدد إنجن (Engen, 1970) المفاهيم والمبادئ المنطقية اللازمة لتدريس وفهم البرهان الرياضي على النحو التالي:
- إذا كان ... فإن ... ($\leftarrow$)
 - بما أن ($\therefore$)، إذن ($\therefore$)
 - التقارير البسيطة A ، B ، C ، ...
 - القضايا المركبة: الوصل $A \wedge B$ ، الفصل $A \vee B$.
 - التقارير الشرطية $A \leftarrow B$
 - التكافؤ $A \equiv B$ أو $A \leftrightarrow B$
 - النفي ونفي النفي $\sim A$ ، $\sim(\sim A)$
 - قاعدة القياس المنطقي $[(A \leftarrow B) \wedge A] \leftarrow B$
 - عكس النقيض للتقرير الشرطي $\sim B \leftarrow \sim A$

ويجب على المعلم أن يحرص على أن يتمكن الطالب من هذه المفاهيم والمبادئ قبل دراسته للبرهان المباشر أو غير المباشر حتى يمكنه التعامل مع البراهين التي يدرسها في ضوء أسس منطقية محددة.

ولما كانت الرياضيات في أساسها علم قائم على النسق الاستنباطي حيث البدء بالمسلمات أو النظريات المبرهنة وصولاً إلى البراهين لذلك لا بد من البدء بدراسة المسلمات والبديهيات والنظريات وصولاً إلى البرهان.

البرهان Proof

يمكن تعريف البرهان بأنه «سلسلة من التقارير الصحيحة التي من خلالها يمكن الوصول إلى بعض الاستنتاجات أو الاستدلالات الصحيحة»⁽⁴⁵⁾.

ففي البرهان يستطيع الطالب أن يحدد المعلومات المتوافرة لديه عن المشكلة وخلفية أبعادها، كذلك يمكنه أن يدرك أو يحدد العلاقات بين هذه المعلومات والتي قد تكون مسلمات أو حقائق أو نظريات أو تعميمات وصولاً إلى نظريات أو مبرهنات جديدة وفي البرهان يحتاج الطالب إلى تحديد المجاهيل والعلاقة التي تربط بين ما هو معلوم وما هو مجهول لكي يربط بينهما.

وعندما يكتسب الطالب القدرة على إقامة سلسلة من الاستنتاجات أو الاستدلالات الصحيحة نقول أنه اكتسب مفهوم البرهان.

(3-6) أنواع البراهين (تصنيف بيل 1978) (Bell, 1978)⁽⁵⁶⁾

أولاً : البرهان المباشر Direct Proof

يقصد بذلك البدء الفرض أو المعطيات ومن خلال الاستمرار في سلسلة من الاستدلالات المنطقية نصل إلى النتيجة المطلوبة أي المطلوب إثبات صحتها، ومن أنواع البرهان المباشر :

1 - البرهان البسيط

$$\frac{ب ، ب \leftarrow ج}{ج} \text{ ويعبر عنه رمزياً بالصورة}$$

بمعنى أنه إذا كانت القضية ب صادقة والجملة الشرطية ب $\leftarrow$ ج صادقة فإن القضية ج تكون صادقة.

وللتأكد من صدق هذا الاستدلال نستخدم جدول قيم الصدق :

	ب	ج	ب ← ج	ب ∧ (ب ← ج)
T : قضية صائبة	T	T	T	T
F : قضية خاطئة	T	F	F	F
	F	T	T	F
	F	F	F	F

واضح الحالة الوحيدة التي تكون فيها ب صادقة، ب ← ج صادقة هي الحالة التي تكون فيها القضية ج صادقة فالاستنتاج في هذه الحالة سليماً من الناحية المنطقية.

2 - البرهان بالطريقة الانتقالية

$$\frac{ب ← ج ، ب ← ج}{ب ← ج}$$

ويعبر عنه رمزياً

بمعنى أنه إذا كانت كل من القضيتين (التقريرين) ب ← ج ، ب ← ج صادقتين فإن القضية ب ← ج تكون صادقة.

وجداول قيم الصدق التالي يوضح هذه النتيجة :

أ	ب	ج	أ ← ب	ب ← ج	أ ← ج	(أ ← ب) ∧ (ب ← ج)
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F	F

واضح من الجدول أن النتيجة $A \leftarrow B$ تكون صادقة في الحالات التي تكون فيها كل من $A \leftarrow B$ ، $B \leftarrow A$ صادقتين.

3 - البرهان بالنفي

$$\frac{A \leftarrow B, B \sim}{A \sim} \text{ ويعبر عنه رمزياً } /$$

بمعنى أنه إذا كانت القضية $A \leftarrow B$ صادقة وكان نفي (سالب) القضية B صادقاً (القضية B كاذبة) فإن نفي (سالب) القضية A يكون صادقاً.

والجدول التالي يوضح ذلك :

$A \sim$	$(A \leftarrow B) \wedge B \sim$	$B \sim$	$A \leftarrow B$	B	A
F	F	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
T	T	T	T	F	F

واضح من الجدول أنه عندما تكون المقدمتان $A \leftarrow B$ ، $B \sim$ صادقتان فإن النتيجة $A \sim$ تكون صادقة.

4 - البرهان بمعكوس النقيض

$$\frac{B \sim, A \leftarrow B}{A \sim} \text{ ويعبر عنه رمزياً } /$$

ومعنى ذلك أنه إذا كانت القضية $B \sim$ ، $A \leftarrow B$ صادقة فإن القضية $A \sim$ تكون صادقة، والجدول التالي يوضح صحة ذلك :

ا	ب	ب ~	ا ~	ب ~ ← ا ~	ا ← ب
T	T	F	F	T	T
F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F

واضح من الجدول أنه عندما تكون القضية $ب \leftarrow ا$ صادقة فإن $ا \leftarrow ب$ تكون صادقة.

5 - البرهان بطريقة الاستقراء الرياضي

ويعبر عنه رمزياً بالصورة :

$$\frac{ق(1), \forall ك د ط, ق(ك) \leftarrow ق(ك + 1)}{\forall ن د ط, ق(ن)}$$

ونعني بذلك :

أن القضية صحيحة عندما $ن = 1$ وأن القضية صحيحة عندما $ن = ك + 1$ إذا كانت صحيحة عند $ن = ك$ حيث $ك$ عدد طبيعي.

ثانياً : البرهان غير المباشر Indirect proof

الصورة الرمزية لهذا البرهان :

$$\frac{(ب \wedge ا) \leftarrow (ب \wedge \neg ا)}{ب \wedge ا}$$

بمعنى أنه إذا كانت القضية $(ب \wedge ا) \leftarrow (ب \wedge \neg ا)$ صادقة فإن القضية $ا \leftarrow ب$ تكون صادقة.

ويتم الوصول إلى البرهان أو النتيجة المطلوبة من خلال عملية استخدام الاحتمالات المتعارضة ومن ثم استبعاد الاحتمالات الخاطئة (الكاذبة) للتوصل

إلى الحل الصحيح، والجدير بالذكر أن أزواج الافتراضات المتعارضة

Contradictory Hypotheses توصف بما يلي :

- أ - لا يمكن ثبوت صحة كل منها في نفس الوقت.
- ب - لا يمكن ثبوت خطأ كل منها في نفس الوقت.
- ج - إذا ثبت خطأ الأول ثبت صحة الفرض الثاني.
- د - إذا ثبتت صحة الفرض الأول كان هذا دليلاً على خطأ الثاني.

والجدير بالذكر أن قانون التعارض للقضية «لا يمكن أن تكون القضية

صادقة وكاذبة في نفس الوقت».

والجدول التالي يوضح صدق الاستدلال الخاص بالبرهان غير المباشر:

أ	ب	ج	ب ~	ج ~	أ ~	أ ~ ب	ج ~ أ	(أ ~ ب) ~ (ج ~ أ)	أ ~ ب
T	T	T	F	F	F	F	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	T	F	F	F

واضح من الجدول أنه عندما تكون القضية (أ ~ ب) ~ (ج ~ أ) (أ ~ ب)

صادقة تكون القضية أ ~ ب صادقة.

ويمكن تلخيص خطوات البرهان غير المباشر فيما يلي:

1 - نضع افتراضين متناقضين أحدهما المطلوب إثبات صحته ونختار

الفرض الآخر في البداية.

2 - نفرض أن هذا الفرض (الآخر) الذي اخترناه في (1) صحيحاً ثم نختبر

ما يترتب على ذلك بواسطة الاستدلال الاستنباطي حتى نرى إذا كان هذا
الفرض يقود إلى تعارض Contradiction أو إلى عدم تألف (عدم
اتساق) Inconsistency.

3 - إذا ثبت أن الافتراض في الخطوة (2) قد قاد بالاستدلال الصحيح إلى
تناقض أو عدم تألف نستخلص من ذلك أنه كان فرضاً خاطئاً.

4 - من الخطوة (3) نستخلص أن افتراض النقيض (الفرض الذي يراد
إثباته) صحيح حتماً طالما أن الافتراض النقيض قد اتضح عدم صحته.

الشرط اللازم والكافي

لنتأمل القضية الشرطية «سيعرض المتهم نفسه للعقوبة ما لم يستأنف
القضية بيد أن رفضه لدفع النفقة يعد شرطاً كافياً لإصدار القاضي قرار
الاثهام»⁽⁴⁷⁾.

هنا لدينا التعبير «شرطاً كافياً» فما هو المدلول المنطقي لهذا التعبير لنتعرف
على جملة أخرى نستخدم نفس التعبير ولكنها أبسط.

ما هو مدلول القول بأن «إذا ذاك زيدا فإنه سينجح» هنا مدلول القول
بأن مذاكرة زيد تعد شرطاً كافياً لنجاحه والجدير بالذكر أن هذا القول لا يقرر أن
زيداً سيرسب في حال عدم مذاكرته لأنه بالإمكان نجاحه في حال عدم مذاكرته
وهذا وارد في أحوال كثيرة منها أن يقوم زيد بالغش أو أن يكون الامتحان سهلاً
أو أن يتساهل أستاذ المادة في تصحيح إجابته وما إلى ذلك من احتمالات.

كما أن هذه القضية لا تقرر أن مذاكرة زيد شرط ضروري لنجاحه بل
تقرر أنها شرط كاف لنجاحه أي إنها لا تقرر أن زيدا لا ينجح إلا إذا ذاك بل
تقرر إنه إذا ذاك نجح.

ولنوضح بمثال آخر :

«إن السم شرط كاف للموت» هذا لا يعني أن المرء لن يموت في حال
عدم تجرعه السم بل يعني أنه سيموت في حال تجرعه إياه، وعلى ذلك إذا

رمزنا للقضية «ذاكر زيد» بالرمز ب وللقضية «نجاح زيد» بالرمز جـ فإن التعبير الرمزي «ب ← جـ» يعني أن القضية ب شرطاً كافياً للقضية جـ بينما تسمى القضية جـ شرطاً لازماً أو ضرورياً لـ ب.

في القضية ب $\leftrightarrow$ جـ يسمى كل من ب، جـ شرطاً لازماً وكافياً للآخر. حيث:

$$ب \leftrightarrow جـ \equiv (ب \leftarrow جـ) \wedge (جـ \leftarrow ب) , [\equiv \text{الرمز يعني تكافئ}] .$$

ولنوضح ذلك نظرياً :

في نظرية رول :

«إذا كانت د : [أ، ب] $\leftarrow R$ متصلة وقابلة للاشتقاق على (أ، ب) وكانت د (أ) = د (ب). فإنه يوجد على الأقل عدد جـ $\exists$ (أ، ب) بحيث د (جـ) = 0.

نجد أن الشروط الواردة هي : 1 - د متصلة على [أ، ب]

2 - د قابلة للاشتقاق على (أ، ب)

3 - د (أ) = د (ب)

هذه الشروط الثلاثة كافية لوجود عدد جـ $\exists$ (أ، ب) بحيث د (جـ) = 0 ولكنها غير ضرورية (لازمة) بمعنى يمكن وجود العدد جـ مع عدم توفر الشروط الثلاثة أي أن وجود العدد جـ لا يستلزم توفر الشروط الثلاثة.

كذلك في نظرية القيمة المتوسطة :

إذا كانت د متصلة على [أ، ب] وقابلة للاشتقاق على (أ، ب) فإنه يوجد عدد واحد جـ على الأقل $\exists$ (أ، ب) بحيث يكون :

$$د (جـ) = \frac{د (ب) - د (أ)}{ب - أ}$$

هذه الشروط كافية وغير لازمة لوجود العدد جـ بمعنى وجود الشرطين السابقين كاف لوجود عدد جـ يحقق النظرية ولكن وجود العدد جـ لا يستلزم توفر الشرطين.

مثال :

برهن أن العددين الحقيقيين أ، ب جذرا المعادلة $s^2 + l + k = 0$ إذا وفقط إذا كان $a + b = -l$ ، $a \cdot b = k$.

نستخدم قاعدة البرهان الشرطي وفرض أ، ب جذري المعادلة.

$$\therefore a = \frac{-l + \sqrt{l^2 - 4k}}{2}, \quad b = \frac{-l - \sqrt{l^2 - 4k}}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{-l + \sqrt{l^2 - 4k}}{2} + \frac{-l - \sqrt{l^2 - 4k}}{2} = -l$$

$$a \cdot b = \left[\frac{-l + \sqrt{l^2 - 4k}}{2} \right] \cdot \left[\frac{-l - \sqrt{l^2 - 4k}}{2} \right] = k$$

$$k = \frac{4k}{4} = \frac{l^2 - 4k}{4} = \frac{l^2 - 4k}{4} = \frac{l^2 - 4k}{4}$$

$\therefore a \cdot b = k$ وهو المطلوب

ثانياً : (فقط إذا أو الجزء الضروري)⁽¹⁾

برهن إذا $a + b = -l$ ، $a \cdot b = k$ فإن أ، ب جذري المعادلة :

$$s^2 + l + k = 0$$

نفرض $a + b = -l$... (1)، $a \cdot b = k$... (2)

$a + b = -l \Rightarrow b = -l - a$ بالتعويض في (2)

$$a \cdot b = k \Rightarrow a(-l - a) = k$$

$$-al - a^2 = k$$

$$\therefore a^2 + al + k = 0 \quad \text{أي أن أ يحقق المعادلة}$$

$$s^2 + l + k = 0 \quad \therefore \text{أ جذر للمعادلة}$$

$$s^2 + l + k = 0 \quad \text{وهو المطلوب}$$

البرهان بواسطة التناقض Proof by Contradiction

يعتبر البرهان بطريقة التناقض للجملة ب هي البرهان بفرض $\sim ب$

تؤدي إلى جملة من النوع ج ~ ج حيث ج هي أي جملة تحوي ب أو أي بديهية أو أي مبرهنة برهنت سابقاً وهذا يبرر بواسطة الجملة الصحيحة دائماً⁽³⁸⁾:

$$[\sim ب \wedge (ج \sim \neg ج)] \leftarrow ب.$$

ومن البديهي أن تكون الجملة ب إما صادقة أو كاذبة ولكن ليس كليهما فإذا فرضنا النقيض لها صادقة (T) فهذا يؤدي إلى جملة أخرى تكون صادقة وكاذبة بنفس الوقت (ج) مثلاً.

إذن $\sim ب$ لا يمكن أن تكون صادقة ولذا فإن ب تكون صادقة.

إذن البرهان بواسطة التناقض وهو صورة البرهان غير المباشر والتي تعني الوصول إلى مناهيات العقل.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن ما هو الفرق بين البرهان بطريقة المعكوس المضاد والذي سبق أن أوضحناه وبين البرهان بطريقة التناقض في حالة البرهان للقضية من النوع ب $\leftarrow ج$.

للإجابة عن ذلك نقول أن الطريقتين متشابهتان عند فرض $\sim ج$ ولكن الاختلاف في حالة البرهان بطريقة التناقض تبقى ب كما هي بينما في حالة البرهان بطريقة المعكوس المضاد تبدأ من $\sim ج$ ونصل إلى $\sim ب$.

ولنوضح ذلك بصورة أكثر تعميماً الفرق بين الطرق الثلاث للبرهنة على الجمل من النوع (هـ $\leftarrow د$).

1 - قاعدة البرهان الشرطي

نفرض أن ع1، ع2، ...، ع ن بديهيات أو مبرهنات

∴ ع1، ع2، ...، ع ن، هـ $\rightarrow$ د

«الرمز $\rightarrow$ يعني تستنتج أن».

، أ، ب د ص (مجموعة الأعداد الصحيحة).

لدينا هـ : س عدد نسبي أي هـ = $\frac{ج}{د}$ ، ج ، د د ص

$$(س + ص) - س = \frac{ج}{د} - \frac{ج}{د} = 0$$

$$ص = \frac{ج - د}{د} = \frac{ك}{ل} \text{ د ن}$$

حيث ن مجموعة الأعداد النسبية.

∴ ص عدد نسبي ولكن من المعطى ص عدد غير نسبي

∴ وصلنا إلى تناقض د ~ ٨

∴ هـ ٨ د ← ق. وهو المطلوب.

ثالثاً : البرهان بمثال مضاد

وهذا النوع من البرهان يستخدم لإثبات خطأ تعميم معين فعندما يكون

لدينا التعميم «٧ س د س ، ق (س)».

فيكفي أن نأتي بحالة لا تنطبق على هذا التعميم ونعبر عن ذلك :

«٣ س د س ، ق ~ (س)».

رابعاً : البرهان باستفاد جميع الحالات

عندما تكون العبارة المطلوب إثباتها (إثبات صحتها) تمثل موقفاً عدد

إمكاناته محدود فإننا نثبت أو نتأكد من صحة تلك الإمكانيات جميعها وبذلك تكون

العبارة صحيحة على الإطلاق.

البرهان والإقناع

عرفنا أن البرهان نوع من المعالجة التي تهدف إلى الإقناع بصحة قضية

ما من خلال تقديم أدلة تدعو إلى الاقتناع إلى حد التأكد من صحة تلك القضية.

ومجرد الاقتناع لا يعني أن هناك برهاناً فوسائل الإقناع متعددة بعضها يستند إلى

معايير ذهنية كما في الرياضيات والفلسفة وبعضها يعتمد على شواهد ذاتية كالاستناد إلى المراجع أو التجريب كما في العلوم الطبيعية.

إلا أن البرهان الرياضي أكثر تدقيقاً في شواهد وأكثراً تشدداً في متطلبات إقناعه فالبرهان الرياضي معالجة لفظية أو رمزية تتمثل في تتابع من العبارات تستتبط كل منها من سابقتها استناداً إلى شواهد معترف بصحتها مثل المسلمات والنظريات ويكون البرهان الرياضي صحيحاً إذا وفقط إذا :

أ - كانت الاستراتيجية المستخدمة تعتمد على توتولوجية منطقية. ويقصد بالتوتولوجي Tautology عبارة عن قضية منطقية صحيحة دائماً مهما كانت قيم الصواب والخطأ لمركباتها مثل القضية :

$$A \vee \sim A, A \leftarrow B \leftrightarrow \sim B \leftarrow \sim A, [(A \leftarrow B) \wedge A] \leftarrow B, \sim (A \wedge \sim A).$$

توضيح * :

A	B	$A \leftarrow B$	$\sim A$	$\sim B$	$(A \leftarrow B) \wedge A$	$[(A \leftarrow B) \wedge A] \leftarrow B$	$\sim (A \wedge \sim A)$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1

(4-6) استراتيجيات تدريس البرهان

يقصد بالاستراتيجية هنا خطة التحرك للوصول إلى هدف محدد وهو إثبات القضية المطلوب البرهنة عليها من حيث الصواب أو الخطأ وتتضمن تتابع

* حاولنا هنا الاستعاضة عن الرمزية T ، F بالرمزين 1 ، 0 والتي كثيراً ما تقابل الطالب في كتب كثيرة خاصة في مجال الحاسوب ونعني بالرمز (1) أن القضية صائبة وبالرمز (0) أن القضية خاطئة.

التحركات أو الخطوات في هذه الخطة أو التوتولوجية أو الصيغة الصحيحة التي ترتكز عليها هذه الخطة.

نماذج من البرهان المباشر :

المعلوم أن البرهان المباشر يمثل تتابع في العبارات الصحيحة والتي تؤدي مباشرة إلى العبارة التي تمثل المطلوب ذاته.
ولتكن العبارة على الصورة $B \leftarrow A$ في مثل هذه الحالة نفترض صحة القضية B فإذا أثبتنا أن القضية $B \leftarrow A$ صائبة فإن القضية A تكون صائبة.

مثال :

اثبت صحة العبارة التالية :

إذا كانت $2S - 7 = 9$ فإن $S = 8$ ، S عدد صحيح.

البرهان : $2S - 7 = 9$

النظير الجمعي

$$2S - 7 + 7 = 9 + 7$$

المحايد الجمعي

$$2S = 16$$

$$2S = 16$$

المعكوس الضربي

$$2S \times \frac{1}{2} = 16 \times \frac{1}{2}$$

المحايد الضربي

$$S = 8$$

$$S = 8$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أن $S = 8$ أي أن :

$$2S - 7 = 9 \Leftrightarrow S = 8.$$

2 - الانتقالية (سلسلة من العبارات الشرطية)

للوصول إلى البرهنة على صحة القضية $C \leftarrow B$ نحتاج أحياناً إلى سلسلة من العبارات الشرطية الانتقالية مثل $C \leftarrow B$ ، $B \leftarrow A$ ، $A \leftarrow K$.

ومن ذلك نستنتج أن ق ← ك.

مثال :

المستوى س ، $\vec{T}$ مستقيم في المستوى س ، $\vec{AB}$ مستقيم مائل عمود على $\vec{T}$ عند ب.

المطلوب إثبات أن مسقط $\vec{AB}$ على المستوى س يكون عمودياً على المستقيم $\vec{T}$.

البرهان :

$\therefore \vec{AD} \perp \text{المستوى س}$

$\therefore \vec{AD} \perp \vec{T} \Leftrightarrow \vec{T} \perp \vec{AD}$ «نظرية»

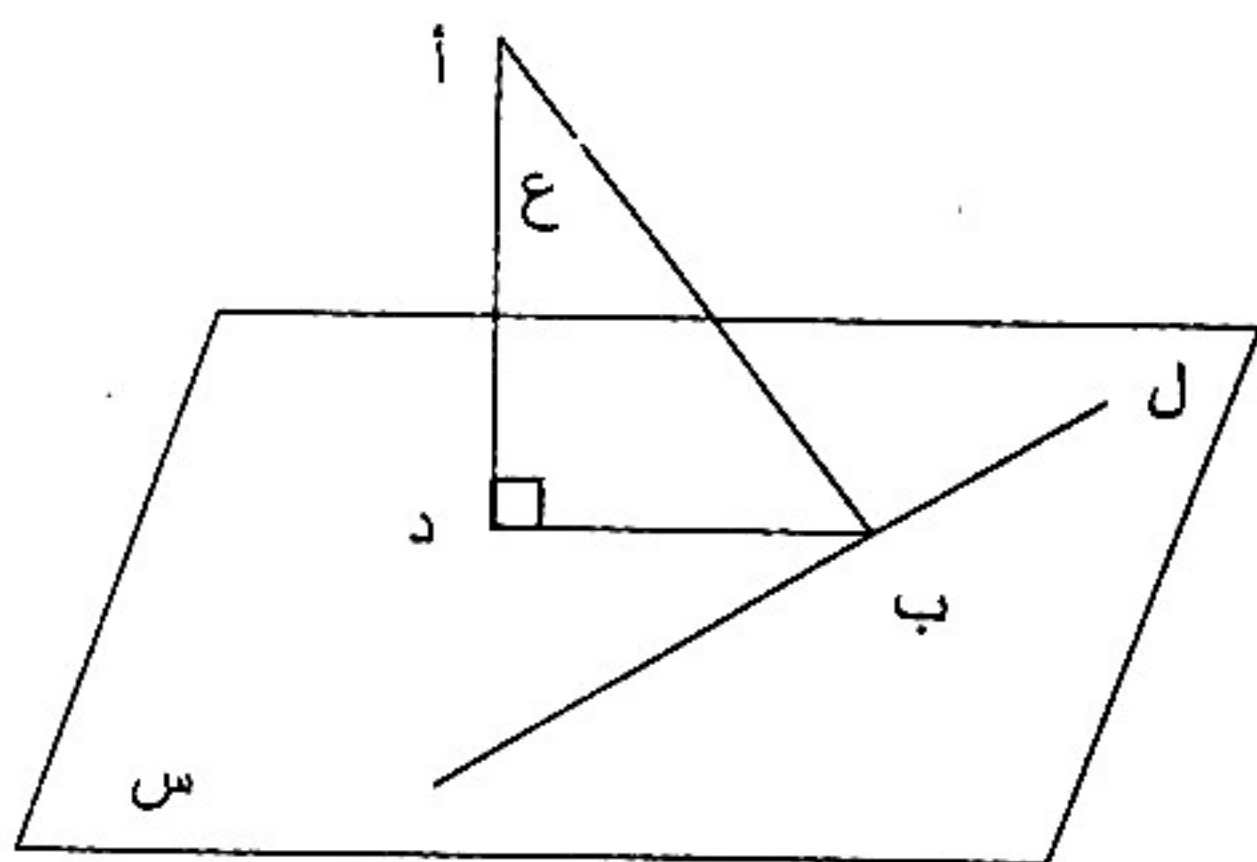
ولكن $\vec{AB} \perp \vec{T} \Leftrightarrow \vec{T} \perp \vec{AB}$ معطى

$\therefore \vec{T} \perp$ كلا من المستقيمين المتقاطعين $\vec{AD}$ ، $\vec{AB}$

$\therefore \vec{T}$ عمودي على مستويهما ليكن ع

$\therefore \vec{T} \perp \vec{BD}$ «نظرية»

أي أن ل عمودي على مسقط $\vec{AB}$ على المستوى س. وهو المطلوب.



3 - البرهان بالنفي

وتعني هذه الاستراتيجية أنه إذا كانت أ ← ب صحيحة ونفي القضية ب

صحيح فإنه يمكن استنتاج أن نفي القضية أ صحيح أيضاً.

مثال (1) :

اثبت أن $\sqrt{2}$ عدد غير قياسي (غير نسبي)

البرهان :

نفرض أن $\sqrt{2}$ عدد قياسي

∴ يمكن وضعه على الصورة $\frac{a}{b}$ حيث أ، ب لا يوجد بينهما قاسم

مشترك.

$$\therefore \sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

∴ $2b^2$ عدد زوجي ∴ a^2 عدد زوجي

∴ أ عدد زوجي $\Rightarrow a = 2l$ ، ل عدد صحيح

$$a^2 = 4l^2$$

$$\therefore 2b^2 = a^2 = 4l^2 \Rightarrow b^2 = 2l^2$$

∴ b^2 عدد زوجي $\Rightarrow b$ عدد زوجي

∴ $b = 2m$ ، م عدد صحيح.

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{4l^2}{4m^2} = \frac{l^2}{m^2}$$

∴ $\sqrt{2}$ لا يمكن أن يكون عدد قياسي.

مثال (2) :

اثبت أن المستقيمين المختلفين $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ يتقاطعان في نقطة واحدة على

الأكثر.

البرهان :

نفرض ل₁، ل₂ يتقاطعان في نقطتين مختلفتين س، ص مثلاً من المسلمات

التي تقول أنه يوجد مستقيم واحد يمر بنقطتين مختلفتين $\vec{L_1} = \vec{L_2}$ وهذا يناقض الفرض (المعطى) الذي يحدد أن المستقيمان $\vec{L_1}$ ، $\vec{L_2}$ مختلفان، $\therefore$ لا بد أن تكون $s = v$ ، أي لا بد أن يتقاطع المستقيمان المختلفان في نقطة على الأكثر.

4 - البرهان بمعكوس النقيض (عكس المعكوس) Contrapositives

أي أنه إذا تحقق $\sim b \rightarrow \sim a$ عكس النظرية مثلاً فإن $a \rightarrow b$ تكون صحيحة.

$$\text{أي أن } (a \rightarrow b) \Leftrightarrow (\sim b \rightarrow \sim a)$$

مثال (1)

اكتب المعكوس المضاد (معكوس النقيض) للجمل التالية :

$$1 - \text{إذا كانت د (س) = ظا س فإن د (س) = قا}^2 \text{ س}$$

$$\text{الحل : إذا كانت د (س) } \neq \text{قا}^2 \text{ س فإن د (س) } \neq \text{ظا س}$$

$$2 - \text{إذا كان س عدد فردي فإن س}^2 \text{ عدد فردي}$$

$$\text{الحل : إذا كان س}^2 \text{ عدد غير فردي فإن س عدد غير فردي}$$

$$3 - \text{إذا كانت د (س) قابلة للاستقاق عند س = س}^0 \text{ فإن الدالة د (س) تكون}$$

$$\text{متصلة عند س = س}^0$$

الجواب :

$$\text{إذا كانت الدالة د (س) غير متصلة عند س = س}^0 \text{ فإن الدالة د (س)}$$

$$\text{تكون غير قابلة للاستقاق عند س = س}^0$$

$$4 - \text{س عدد نسبي شرط كاف لكي يكون س عدد حقيقي}$$

$$\text{الجواب : س عدد غير حقيقي شرط كاف لكي يكون س عدد غير نسبي}$$

$$5 - \text{س} \geq v \rightarrow d \geq (s) \text{ (ص)}$$

$$\text{الجواب : د (س) } < v \rightarrow s < v$$

مثال (2)

اثبت صحة العبارة التالية :

إذا كانت ϕ هي المجموعة الخالية فإن ϕ مجموعة جزئية لأي مجموعة.

البرهان :

نفرض أن ϕ ليست مجموعة جزئية للمجموعة س

$$\therefore \phi \not\subseteq S \Leftrightarrow \exists a \in \phi, a \notin S$$

أي يوجد عنصراً a ينتمي إلى المجموعة ϕ ولا ينتمي إلى س

أي يوجد عنصراً ينتمي إلى المجموعة $\phi \Leftrightarrow$

ϕ ليست مجموعة خالية وهذا يعني أننا أثبتنا أنه إذا لم تكن ϕ مجموعة جزئية

من أي مجموعة س فإن ϕ لا تكون المجموعة الخالية.

مثال (3)

اثبت أنه إذا كان a^2 عدد زوجي فإن a عدد زوجي

البرهان :

نفرض a عدد غير زوجي (فردى) $\therefore$

$$a = 2n + 1 \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{مجموعة الأعداد الطبيعية}$$

$$a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$= 2(2n^2 + 2n) + 1$$

$$= 2l + 1 \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$= \text{عدد فردي}$$

أي إنه إذا لم يكن a عدداً زوجياً فإن a^2 عدد غير زوجي (فردى) وهذا يثبت

صحة العبارة.

5 - البرهان بطريقة الاستقراء الرياضي

في هذه الطريقة يطلب إثبات صحة عبارة ما لجميع قيم n الصحيحة

الموجبة وتتضمن هذه الاستراتيجيات :

- أ - التحقق من صحة العبارة عندما $n = 1$
- ب - اعتبار صحة العبارة في حالة $n = k$ ، k و v ص*
- ج - التحقق من صحة التحرك تنابعيًا عند $n = k + 1$

مثال :

اثبت باستخدام الاستقراء الرياضي صحة العبارة التالية لأي عدد صحيح

موجب.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

البرهان :

نفرض $n = 1$ الطرف الأيمن $= 1$

الطرف الأيسر $= \frac{1}{2}(1+1) = 1$

العبارة صحيحة في حالة $n = 1$

الخطوط التالية، نفرض صحة العبارة في حالة $n = k$

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

نثبت صحة العبارة في حالة $n = k + 1$

الحد التالي للحد k هو $k + 1$ بإضافته

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) =$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$= (k+1) \left(\frac{k+2}{2} \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

∴ العبارة صحيحة في حالة $n = k + 1$

∴ صحة العبارة في حالة $n = k$ أدت إلى صحتها في حالة $n = k + 1$

وبالتالي فالعبارة صحيحة لكل n و v ص*

«ص* مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة».

6 - البرهان بمثال مضاد

هذه الاستراتيجية تصلح عندما نريد أن نثبت بمثال خطأ التعميم

مثال (1) :

اثبت خطأ العبارة التالية :

لكل $s \in \mathbb{N}$ (مجموعة الأعداد الطبيعية) فإن :

$$ص = د (س) = س^2 + 41س + 41 \quad \text{عدداً أولياً}$$

البرهان :

واضح أنه عند $s = 1, 2, 3, 4$ تعطي أعداد أولية

ولكن عند $s = 41$ فإن :

$$ص = (41)^2 + (41)(41) + 41$$

$$= (1 + 41 + 41)(41)$$

$$= (83)(41) \quad \text{وهذا ليس عدداً أولياً.}$$

∴ التعميم خاطئ.

مثال (2) :

اثبت عدم صحة العبارة :

لكل $a, b \in \mathbb{H}$ (مجموعة الأعداد الحقيقية)

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} \times \overline{b}$$

البرهان :

$$1 = \overline{1} = \overline{1 \times 1} \quad \text{ولكن}$$

$$1 = \overline{1} = \overline{1} \times \overline{1}$$

∴ التعميم خاطئ.

7 - البرهان غير المباشر

تعتمد هذه النظرية على أن نقيض هذه النظرية هو الصحيح وأن هذا

الأخير يؤدي إلى تناقض مع المعطى في هذه الحالة فالمعطى هو الصحيح كما سبق أن أوضحنا.

مثال :

إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين يساوي الصفر فإن أي من العددين يساوي الصفر أو كليهما.

البرهان :

نفرض أ، ب عددين حقيقيين وأن $a \times b = 0$

نفرض أن $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ عكس النتيجة

$\therefore \frac{1}{a} , \frac{1}{b} \in \mathbb{C}$ ولكن $a \times b = 0$

$$0 = 0 \times \frac{1}{a} = (a \times b) \times \left(\frac{1}{a}\right)$$

$$0 = b \times \left(a \times \frac{1}{a}\right)$$

$$0 = b \times 1 \Leftarrow 0 = b$$

وهذا يتناقض مع الفرض أن $b \neq 0$

$\therefore$ الفرض أن $b \neq 0$ خاطئ وبنفس الطريقة نثبت أن :

$$a \neq 0 \text{ خاطئ } \therefore a \times b = 0 \Leftarrow a = 0 \text{ أو } b = 0$$

8 - البرهان باستنفاد جميع الحالات

عندما تكون العبارة المطلوب إثبات صحتها تمثل موقفاً عدد إمكاناته محدوداً فإننا نحقق صحة كل من تلك الحالات فمثلاً إذا كان المطلوب إثبات صحة العبارة ك وكانت جميع الإمكانات الأخرى للقضية هي ل، م، ن.

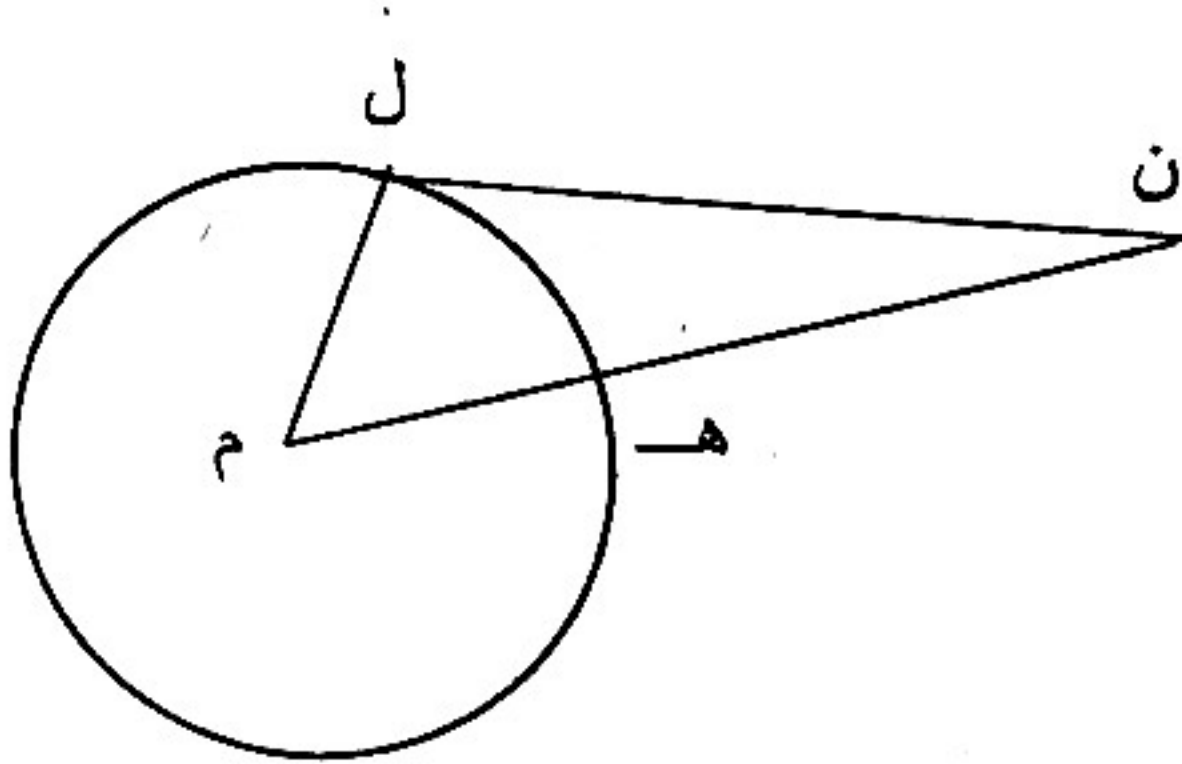
فإذا أثبتنا عدم صحة صحة ل، م، ن أي أثبتنا أن $\sim L, \sim M, \sim N$ فإننا نكون بذلك أثبتنا صحة ك وذلك استناداً إلى التوتولوجي :

$$(K \vee L \vee M \vee N) \wedge (\sim L \wedge \sim M \wedge \sim N) \Leftarrow K$$

مثال (1) :

اثبت أن أقصر مسافة من نقطة خارج دائرة إلى محيطها هو طول القطعة المستقيمة التي امتدادها يمر بمركز الدائرة.
المطلوب : إثبات أن $\overline{ن هـ} > \overline{ن ل}$

البرهان:



الحالات الموجودة

$$\overline{ن هـ} = \overline{ن ل}$$

$$\overline{ن هـ} < \overline{ن ل}$$

$$\overline{ن هـ} > \overline{ن ل}$$

$\Delta ن م ل$ قائم الزاوية في ل

$$\overline{ن م}^2 = \overline{ن ل}^2 + \overline{ل م}^2 \quad \text{باعتبار } \overline{ن هـ} = \overline{ن ل} \quad \text{نجد :}$$

$$\overline{ن م}^2 = \overline{ن هـ}^2 + \overline{هـ م}^2 \quad \text{وهذه النتيجة خاطئة لأية قطعة مستقيمة}$$

$$\therefore \overline{ن هـ} = \overline{ن ل} \quad \text{خاطئ}$$

في $\Delta ن م ل$ يكون مجموع أي ضلعين أكبر من الضلع الثالث

$$\overline{ن ل} + \overline{ل م} < \overline{ن م}$$

$$\overline{ن ل} + \overline{ل م} < \overline{ن هـ} + \overline{هـ م} \quad \text{ولكن } \overline{ل م} = \overline{هـ م}$$

$$\therefore \overline{ن ل} < \overline{ن هـ}$$

أي أن $\overline{ن هـ}$ هو أقصر مسافة من نقطة خارج دائرة إلى محيطها.

مثال (2) :

اثبت أن $س - ص = س \cap ص'$

البرهان :

نكون جدول الانتماء للحالات الأربع :

س	ص	س - ص	ص	س $\cap$ ص
ص	ص	ص	ص	ص
ص	ف	ف	ف	ف
ف	ص	ف	ص	ف
ف	ف	ف	ف	ف

من العمود الثالث والعمود الخامس في الجدول تتضح صحة العلاقة.

9 - البرهان على وجود حل

يطلب أحياناً إثبات وجود حل لمسألة ما :

في هذه الحالة يتطلب تفكير تأملي وخبرة رياضية وقدرة على الاستدعاء.

مثال (1):

اثبت أنه يوجد حل للمعادلة $أ س + ب = 0$ حيث $أ \neq 0$ في حقل الأعداد النسبية (القياسية).

مثال (2):

اثبت أنه توجد دالة متصلة عند نقطة وغير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

17

دور المعلم في تنمية مهارة البرهان :

من الأهمية بمكان أن يعمل المعلم جاهداً على تنمية مهارات البرهان لدى تلاميذه عن طريق :

1 - تعويد الطلاب على التعرف على ما هو معطى وما هو مطلوب والتمييز بينهما في كل مجال.

- 2 - إعطاء الفرصة للطلاب لتحليل الموقف بنفسه وأن يضع خطة الحل أو الطريقة للوصول إلى الحل ومن ثم طريقة التفكير في الحل.
 - 3 - تعويد الطلاب على وضع الأسانيد لكل خطوة يقومون بها من قبيل نظرية، مسلمة، حقيقة، خاصية، نتيجة.
 - 4 - تعريف الطلاب بأهمية حفظ وفهم التعاريف والقوانين والنظريات الأساسية.
 - 5 - أن يميز الطلاب بين الاستقراء والاستنباط.
 - 6 - تشجيع الطلاب على ترجمة التمارين الهندسية إلى رسوم وكذلك ترجمة المسائل اللفظية إلى رموز يمكن التعامل معها.
 - 7 - تنمية القدرة لدى الطلاب على تحديد المجاهيل في المشكلة.
 - 8 - تنمية القدرة لدى الطلاب على استنتاج العلاقات بين المفاهيم المعطاة.
 - 9 - تنمية روح التعاون بين الطلاب في تحليل المشكلات ووضع الفروض اللازمة للوصول إلى الحل.
 - 10 - تنمية الثقة لدى الطلاب بقدرتهم على حل التمارين أو المشكلات وبرهنتها بسهولة.
- وسنقدم نموذجاً لدرس خاص بطرائق البرهان كي يستفيد منه المدرسين أو طلاب التربية العملية في كليات ومعاهد التربية.

(5-6) درس نموذجي

الموضوع : طرائق البرهان - البرهان المباشر

أهداف الدرس

من المتوقع أن يكتسب الطالب المهارة في أن :

- 1 - يستنتج أهمية البرهان الرياضي.
- 2 - يتعرف على أنواع البرهان الرياضي.
- 3 - يتعرف على الاستراتيجيات التي يبني عليها كل نوع من أنواع البرهان الرياضي.
- 4 - يشارك الطالب في البرهنة على كثير من التمارين أو القضايا والنظريات.
- 5 - يميز بين استراتيجيات البرهان المباشر والبرهان غير المباشر.

الوسائل التعليمية

كراس النشاط للطالب.

تقديم

من خلال دراستنا في السنوات السابقة كنا نتوقف في محطات لإثبات حقيقة مهمة كنا نطلق عليها اسم النظريات أو المبرهنات أو نبرهن على صحة تمرين رياضي.

وسنحاول في هذا الموضوع (الدرس) أن نثبت صحة هذه البراهين بدقة حيث أن هذا الموضوع (طرق البرهنة) يعتبر واحد من الموضوعات المستقبلية الهامة في الرياضيات فالهدف ليس برهنة مجموعة كبيرة من النظريات فقط ولكن الإلمام ببعض المعرفة عن المنطق الرياضي وقوانينه وكذلك الحصول على أفضل فهم للمقصود بالبرهان وأنواعه فكل برهان يحتاج إلى التوسع في الأساسيات التالية:

- 1 - المصطلحات الغير معرفة (اللا معرفات) مثل النقطة، الفئة ...
- 2 - صياغة التعريفات والمصطلحات والمسلمات.

3 - النظريات المبرهنة سابقاً.

4 - قواعد المنطق الرياضي.

كما أننا بحاجة للتعامل مع الجمل الشرطية مثل إذا كان ب فإن جـ ويعبر عنها بالرمز «ب ← جـ» وفي هذه الحالة تسمى القضية ب بالمقدمة والقضية جـ بالنتيجة وتعتبر دائماً المقدمة صائبة والمطلوب إثبات أن النتيجة صائبة.

مرحلة الكشف

نشاط (1)

عرفت أن القضية (إذا كان ن عدد طبيعي زوجي فإن ن² عدد طبيعي زوجي).

تعني : المقدمة هي ن عدد طبيعي زوجي

النتيجة هي ن² عدد طبيعي زوجي

إذا كانت القضية الشرطية كلها صائبة وكانت المقدمة صائبة فمن قواعد المنطق الرياضي فإن النتيجة تكون صائبة.

نشاط (2)

اثبت أنه (إذا كان س $4 + 7 = 3$ فإن س = 3)

الخطوات المتبعة

الفرض : ... س $4 + 7 = 3$

المطلوب : إثبات أن س = 3

الحل :

$$(1) \quad \text{إذا كان س } 4 + 7 = 3$$

فإن س $4 + 7 = 3$ خاصية الإضافة في المساواة

$$(2) \quad \text{إذا كان (س + 4) } 7 = 3 \text{ فإن } 7 = 3 + 4$$

فإن $s + ((-4) + 4) = (-4) + 7$ الخاصية التجميعية للجمع

$$(3) \quad \text{إذا كان } s + ((-4) + 4) = (-4) + 7$$

فإن $s + 0 = (-4) + 7$ خاصية العنصر النظير

$$(4) \quad \text{إذا كان } s + 0 = (-4) + 7$$

فإن $s = (-4) + 7$ خاصية العنصر المحايد

$$(5) \quad \text{إذا كان } s = (-4) + 7$$

فإن $s = 3$ تعريف الجمع

وعلى ذلك أثبتنا أنه إذا كان $s + 4 = 7$

فإن $s = 3$

نشاط (3)

اثبت أنه «إذا كان $s - 1 < 4$ فإن $s < 5$ »

الحل :

الفرض : $s - 1 < 4$

المطلوب : إثبات أن $s < 5$

البرهان :

إذا كان $s - 1 < 4$

فإن $s - 1 + 1 < 4 + 1 \dots$ خاصية الإضافة

$s + (-1 + 1) < 4 + 1 \dots$ الخاصية التجميعية

$s + 0 < 4 + 1 \dots$ خاصية العنصر النظير (المعكوس)

$s < 4 + 1 \dots$ خاصية العنصر المحايد

س < 5 ... خاصية الإضافة
نجد أن إذا كان :

$$س - 1 < 4 \quad \text{فإن} \quad س < 5$$

نشاط (4)

اثبت أنه إذا كان س عدد طبيعي زوجي فإن $س^2$ عدد طبيعي زوجي

الخطوات المتبعة

الفرض : س عدد طبيعي زوجي

المطلوب : إثبات أن $س^2$ عدد طبيعي زوجي

البرهان :

إذا كان س عدد زوجي

فإن $س = 2ن$ ، ن و ط ... تعريف العدد الزوجي

إذا كان س $س = 2ن$

فإن $س^2 = (2ن)^2$ خاصية إذا كان $أ = ب$ فإن $أ^2 = ب^2$

إذا كان س $س^2 = (2ن)^2$

فإن $س^2 = 2ن \times 2ن$

$$س^2 = (2ن)^2 = 2ل$$

ولكن $ل = 2ن^2$ و ط خاصة الانغلاق

وعلى ذلك $2(2ن^2)$ عدد زوجي (تعريف العدد الزوجي)

أي إذا كان س $2(2ن^2) = 2(2ن^2)$

فإن س $س^2$ عدد زوجي تعريف المساواة

وعلى ذلك إذا كان س عدد زوجي فإن $س^2$ عدد زوجي

نشاط (5)

إذا كان س، ص عددان طبيعيين فرديان فإن $س + ص$ عدد طبيعي فردي

الخطوات المتبعة

الفرض : س ، ص عددان طبيعيان فرديان
المطلوب : إثبات أن $s + v$ عدد طبيعي زوجي

الحل :

إذا كان س ، ص عددان فرديان

$$\text{فإن } s = 2l + 1$$

تعريف العدد الفردي

$$v = 2m + 1$$

م ، ل $\in \mathbb{P}$

$$s + v = (2l + 1) + (2m + 1)$$

(خاصية الإضافة)

$$s + v = 2l + 2m + 2$$

(الخاصية التجميعية)

$$s + v = 2(l + m + 1)$$

(الإبدالية، التوزيع)

$$\text{ولكن } l + m + 1 \in \mathbb{P}$$

(خاصية الانغلاق)

$$\text{فإن } 2(l + m + 1) \text{ عدد زوجي}$$

(تعريف العدد الزوجي)

$$\text{حيث } s + v = 2(l + m + 1)$$

(تعريف المساواة)

$$\therefore s + v \text{ عدد زوجي}$$

وهكذا فإنه إذا كان س ، ص عددان طبيعيان فرديان

فإن $s + v$ عدد طبيعي زوجي

مرحلة تقديم المفهوم

من خلال الأنشطة السابقة نجد أن طريقة البرهان تبدأ بالفرض أو المقدمة (الصائبة) وهذا الفرض يقود مباشرة إلى النتيجة المطلوبة ويسمى ذلك النوع البرهان المباشر.

التطبيق

مرحلة التطبيق

- 1 - اثبت أنه إذا كان s ، v مضاعفات للعدد 5 فإن $s + v$ مضاعف للعدد 5.
- 2 - إذا كان s ، v مضاعفات للعدد 3 فإن s ، v مضاعفاً للعدد 3.
- 3 - إذا كان s مضاعف للعدد 2، v مضاعف للعدد 3 فإن s ، v مضاعفاً للعدد 6.
- 4 - إذا كان s يقبل القسمة على 3 فإن s^2 يقبل القسمة على 3.
- 5 - إذا كان s مضاعف للعدد 3، v مضاعف للعدد 5 فإن s ، v مضاعف للعدد 15.
- 6 - إذا كان $ab = a$ ، $a \neq 0$ فإن $b = 1$.
- 7 - إذا كان s ، v ، e ثلاثة أعداد فردية طبيعية فإن $s + v + e$ عدد طبيعي فردي.
- 8 - إذا كان $a + b = b + c$ فإن $a = c$.
- 9 - إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، $b, d \neq 0$ فإن $ad = bc$.

الموضوع : البرهان بإعطاء مثال معاكس

نشاط (1)

برهن خطأ القضية

$$\forall a, b \in \mathbb{N} : (a + b)^2 = a^2 + b^2$$

الخطوات المتبعة

$$1 - \text{افرض } a = 1, b = 0$$

$$\text{الطرف الأيمن } (0 + 1)^2 = 1^2 = 1$$

$$\text{الطرف الأيسر } 1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$$

∴ الطرفان في هذه الحالة متساويان

لكن بفرض $أ = 1$ ، $ب = 2$

$$\text{الطرف الأيمن} = (2 + 1)^2 = 3^2 = 9$$

$$\text{الطرف الأيسر} = 1^2 + 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

الطرفان غير متساويين ∴ القضية خاطئة

نشاط (2)

مثال توضيحي للبرهان بمثال مضاد.

«إذا كان $س \in ط$. فإن $ص = س^2 + س + 41$ تعطي دائماً عدداً أولياً لكل $س \in ط$ ».

البرهان :

عندما $س = 1$ ∴ $ص = 41 + 1 + 1 = 43$ عدد أولي

$س = 2$ ∴ $ص = 41 + 2 + 4 = 47$ عدد أولي

$س = 41$ $ص = 41 + 41 + 41^2 =$

$= 41 \times 2 + 41^2 =$

$= (2 + 41) (41) =$

$43 \times 41 =$ وهذا عدد غير أولي

∴ القضية خاطئة.

مرحلة تقديم المفهوم

لإثبات خطأ القضية ($\forall س \in ط، ب (س)$) يكفي أن نجد عنصراً واحداً

على الأقل يجعل القضية $ب (س)$ خاطئة.

أي ($\exists س \in ط، \sim ب (س)$) حيث $\sim ب (س)$ تعني نفي $ب (س)$.

فمثلاً :

أ - لإثبات خطأ القضية

«كل عدد يقبل القسمة على أ ويقبل القسمة على ب فإنه يقبل القسمة على أ. ب.»

البرهان :

ليكن $24 = س$ يقبل القسمة على 2 وعلى 8
ولكن $24 = س$ لا يقبل القسمة على $2 \times 8 = 16$
∴ القضية خاطئة.

ب - لإثبات خطأ القضية التالية :

«مجموع عددين فرديين يساوي عدد فردي»

البرهان :

ليكن $9 = س$ ، $11 = ص$ عددين فرديين
المجموع $س + ص = 9 + 11 = 20$ عدد غير فردي
∴ القضية خاطئة.

تطبيق

مرحلة التطبيق

أولاً : برهن خطأ القضايا الآتية بأخذ مثلاً معاكساً :

$$(1) \quad (س + ص)^2 = س^2 + ص^2 + س ص \quad س، ص \in \mathbb{H}$$

$$(2) \quad أ^2 + ب^2 = (أ + ب)^2 \quad أ، ب \in \mathbb{H}$$

$$(3) \quad \text{إذا كان } أ < ب \text{ فإن :}$$

$$\frac{1}{ب} < \frac{1}{أ} ، \quad أ، ب \in \mathbb{H}^+$$

الواجب

ثانياً : برهن صواب أو خطأ القضايا التالية :

- 1 - إذا كان s عددًا فرديًا فإن $s^2 - 1$ يقبل القسمة على 4
- 2 - إذا كان s عددًا فرديًا فإن $s^2 + 1$ عددًا زوجيًا
- 3 - إذا كان s عدد لا يقبل القسمة على 3 فإن s^2 لا يقبل القسمة على 3.
- 4 - إذا كان s ، v ، e ثلاثة أعداد فردية طبيعية فإن $s(v + e)$ عدد زوجي.
- 5 - إذا كان n عدد صحيح، n^3 عدد فردي فإن n عدد فردي.

الفصل السابع

تدريس المهارات

Teaching Skills

- (1-7) المقدمة
- (2-7) المهارة
- (3-7) أنواع المهارات
- (4-7) أسباب القصور في المهارات الرياضية
- (5-7) المهارات الأساسية الضرورية
- (6-7) استراتيجيات تدريس المهارات
- (7-7) درس نموذجي في الدوال الدائرية

الفصل السابع المهارات

(1-7) مقدمة

تعمل المدرسة جاهدة من خلال المناهج المدرسية وعن طريق المعلمين على النمو الشامل للمتعلم في الجانب المعرفي والجانب الانفعالي أو الوجداني وكذلك الجانب المهاري أو النفس حركي والجانب المهاري لا يقل أهمية عن الجوانب الأخرى، فاستخدام المتعلم للمسطرة لقياس طول قطعة مستقيمة أو رسمه لمثلث على ورقة مقوية ثم استخدام المقص في قصه وتلوينه باللون الذي يميل إليه المتعلم تمثل مهارات ضرورية للمتعلم.

وعند فهم المتعلم لنظرية رياضية وقيامه بإجراء الخطوات اللازمة والسليمة لحل التمارين الخاصة بهذه النظرية يمثل مهارة لدى المتعلم وعندما يقوم المتعلم برسم قطاع دائري في دائرة معلومة وقيامه بحساب مساحة هذا القطاع فهذه أيضاً مهارة.

ولقد أوضح «جانجيه» Jangé أن أكثر المداخل تعبيراً عن العلم لتحقيق إيجابية التلميذ هي تلك الطريقة التي يستخدمها العلماء في أبحاثهم فالعلماء يقومون بعمليات العلم مثل الملاحظة وجمع المعلومات وفرض الفروض والتجريب والتحكم في المتغيرات والقياس والتفسير وتمثل هذه المهارات يمكن أن يكتسبها التلميذ من خلال دراسته للعلوم المختلفة مثل الرياضيات وعلوم الأحياء وغيرها من العلوم.

ويشير «بياجيه» إلى أن نشاط الطفل هو الأداة الرئيسية لنموه المعرفي فهو مصدر النشاط ونتيجته عائدة عليه كما أن استثارة القلق المعرفي ينتج عنه الإخلال بالاتزان لدى الفرد مما يؤدي إلى المزيد من عمليتي المماثلة والمواءمة التي ينتج عنها المزيد من الأبنية المعرفية وهذا القلق المعرفي يؤدي إلى إثارة

الدافعية وزيادة المعرفة⁽¹⁾.

والجدير بالذكر أن اكتساب المعلومات ليس هدفًا في حد ذاته ولكن من خلال ذلك يكتسب التلميذ مهارات التفكير السليم وكيف يفكر تفكيرًا منتجًا مبدعًا يتسم بالابتكارية والجدة، لذلك فالهدف الأول للتربية هو نمو القدرة لدى التلاميذ على حل المشكلات⁽²⁾.

فأسلوب حل المشكلات يقود إلى تحسين القدرة على اكتساب المعلومات والتلميذ الذي يكتسب المعرفة عن طريق الممارسة والنشاط العلمي نجده أثناء تعلمه تواجهه صعوبات ومشكلات يتعين عليه حلها وهو في تحركه لإيجاد الحل لهذه المشكلة نجده يكتسب المعارف والمهارات العقلية والحركية وتنمو لديه الميول والاتجاهات.

لذلك نجد جهود التربويين موجهة بصورة دائمة نحو إتاحة الفرصة للتلاميذ للمرور بالخطوات الأساسية لأسلوب حل المشكلات وأن التربويين يؤكدون على ضرورة اهتمام المعلمين من خلال طرائق تدريسهم على اكتساب التلاميذ المهارات الحركية ومهارات البحث والتقييم.

ويرى كثير من علماء الرياضيات التربوية أن تعلم الرياضيات يرادف عملية اكتساب المهارات الأساسية في الرياضيات خاصة في مجال الأعداد والترقيم والعمليات الحسابية والجبرية والهندسية.

وقد يرى البعض أن الدور الذي تلعبه الآلات الحاسبة وأجهزة الكمبيوتر قد يؤثر تأثيرًا سلبيًا على تعلم المهارات واكتسابها إلا أن تعلم المهارات الرياضية واكتسابها يبقى ضروريًا وهامًا من حيث⁽³⁴⁾:

1 - إكساب المهارات وإتقانها يساعد المتعلم على فهم الأفكار والمفاهيم الرياضية فهما واعيًا.

2 - أن بعض المواقف التعليمية لا تحتاج إلى آلة حاسبة، فاستخدام المتعلم

لمهارته وقدرته على إجراء الحسابات ذهنياً ينمي قدرته على التفكير السليم وقد يؤثر اللجوء إلى الآلات الحاسبة باستمرار إلى تعطيل تفكير المتعلم.

3 - اكتساب المهارات يسهل في أداء كثير من الأعمال الحياتية واليومية للفرد في البيت والعمل ويزيد من قدرة الفرد على أداء أنشطة متنوعة.

4 - إتقان المهارات يتيح الفرصة للمتعلم لكي يوجه تفكيره وجهده ووقته بشكل أفضل في المسائل والمواقف التي يواجهها ومن ثم تسهل عليه حل المشكلات حلاً علمياً سليماً.

5 - أن الإلمام بالمهارات واكتسابها يزيد من معرفة المتعلم وإلمامه بخصائص الأعداد والعمليات المختلفة عليها وتعمق فهمه للنظام العددي والترقيم والبنى الرياضية.

6 - أن اكتساب المهارات وتعلمها لا يتم من فراغ وإنما يحتاج إلى بعض الجوانب المعرفية مثل المفاهيم والتعميمات والبراهين وغيرها وبالتالي فالمهارة تصبح معياراً للحكم على مدى استيعاب التلميذ ومدى تطبيقه للمادة الدراسية.

فالتلميذ أو المتعلم «س» الذي يأخذ وقتاً طويلاً في إجراء عملية القسمة المطولة مقارنة بزميل آخر «ص» دليل على أن هذا التلميذ «س» لديه قصور في خطوات الحل نتيجة لعدم معرفته القانون أو الخوارزمية المستخدمة وحتى إذا أنهى الحل على شكله الصحيح يكون القصور في عامل السرعة وهي أحد أهم عناصر المهارة.

ويضيف «مجدي عزيز» أن المهارات تساعد الفرد على مواجهة المشكلات التي قد تصادفه في حياته فيتخذ حيالها القرارات العقلانية القائمة على أساس تفكيره الذاتي ومن جهة أخرى تكسب المهارات الفرد الميول الإيجابية نحو العلم فيستطيع بسهولة مسايرة كل جديد وحديث في مجال العلم والتكنولوجيا

كما إنها تجعل الفرد إيجابياً متفاعلاً فيستطيع توسيع نطاق علاقاته بالآخرين⁽⁴²⁾.

ويقرر مؤتمر كامبردج للرياضيات المدرسية بأن الكفاءة المناسبة في العمليات الحسابية والجبرية ضرورية لدراسة الرياضيات بشرط ألا تعتمد وسائل تعليم وتنمية المهارات على تدريبات نمطية وروتينية⁽⁶⁰⁾.

والسؤال الذي يطرح نفسه ما هي خصائص الكفاءة «الأداء الماهر» ؟

كل مدرس يحاول أن يحكم على مدى تحقق أهدافه في المجال المهاري لدى تلاميذه عندما يطلب منهم إجراء مهارة ما، والخصائص التالية تساعد المدرس أو المعلم على الحكم على مدى كفاءة تلاميذه⁽¹³⁾:

1 - التآزر : بمعنى التفاعل والتناسق بين المثيرات والاستجابات تكون واضحة فعندما يطلب المعلم من تلاميذه تصنيف زاوية معلومة فيلاحظ تناسق الخطوات التي يقومون بها وتتابعاتها من رسم الزاوية واستخدام الفرجار في التصنيف والوصول إلى التصنيف.

2 - السرعة : فالمهارة تتطلب السرعة في الأداء بعد الوصول إلى عمليتي الفهم والاستيعاب للحركات.

3 - الدقة : لابد أن يصاحب السرعة في المهارة الدقة في الأداء لكي يكون هناك إتقان للمهارة.

4 - القدرة على الأداء تحت الضغوط : بمعنى القدرة على أداء المهارة حتى لو صادف الشخص المتعلم بعض الصعوبات أو المعوقات.

5 - التوقيت : كثير من المهارات تحتاج إلى نوع من التوقيت المناسب لأداء الحركة.

6 - الاستراتيجية : يجب أن تتبع في بعض المهارات استراتيجيات مناسبة

للتفـيـذ، فـلا عـب كـرة القـدم يـتقـن اللـعـب الفـردـي و لـكـن المـهـارة فـي تـحـقـيـق الـأهـداف يـجـب أن يـسـبـقها اسـتـرا تـيـجـيـة تـتـفـيـذ عـن طـريـق خـطـة يـضـعها المـدرب للـعـب فـي المـلـعـب ومـسـئـوليـة اللـاعـب اسـتـخـدام مـهـاراته الفـردية فـي تـتـفـيـذ هـذه الخـطـة والنـجـاح فـيـها.

(2-7) تعـريـف عام بالمـهـارة

- 1 - يعرف قاموس التربية المهارة بأنها حذاقة تنمو بالتعلم وقد تكون حركية أو لفظية أو عقلية أو مزيجاً من أكثر من نوع⁽³⁹⁾.
- 2 - يعرف جود "Good" المهارة بأنها ذلك الشيء الذي يتعلمه الفرد ليؤديه بسهولة ودقة وسرعة قد يكون ذلك الأداء جسمانياً أو عقلياً⁽⁶⁶⁾.
- 3 - يعرف رشدي لبـيب المـهـارة بأنها القـدرة على القيام بعملية معينة بدرجة من السرعة والإتقان مع الاقتصاد في الجهد المبذول⁽¹⁷⁾.
- 4 - المهارة هي القدرة على أداء عمل معين بدقة وبسرعة معينة والمهارة نشاط نفس حركي يتطلب من المتعلم تنسيقاً بين الحركات الحسية والإدراك الانفعالي.
- 5 - المهارة هي القدرة على أداء عمل معين بدقة وفي أقل وقت ممكن⁽³⁶⁾.

وعموماً فجميع التعريفات السابقة للمهارة تركز على :

- 1 - القدرة على أداء العمل المراد القيام به.
- 2 - السرعة في الأداء.
- 3 - الدقة في العمل.
- 4 - أقل جهد يبذل في الأداء.

(3-7) أنواع المهارات

يمكن تقسيم المهارات إلى مجموعة من الأنواع منها :

1 - المهارة العملية Practical skill

وهي قدرة المتعلم على استخدام الأجهزة العلمية والأدوات والمواد وإجراء العمليات ورسم الأشكال وتركيب مجموعة من الأشياء المجسمة بسرعة ودقة وتلافي الأضرار والأخطاء.

2 - المهارة الاجتماعية Social skill

يقصد بها المهارات التي يكتسبها التلاميذ أثناء تعلمهم والتي تظهر طبيعة تعامله مع زملائه ومعلميه مثل مهارة التعاون مع الآخرين في جو من الود والتفاهم ويكون ذلك من خلال العمل في مجموعات كفريق عمل في المعمل أو من خلال القيام بمسرحيات علمية أو تاريخية أو رحلات علمية في البيئة المحيطة أو عند زيارة المصانع أو المتاحف أو المكتبات العامة أو الاشتراك في عمل معارض.

3 - مهارات التدريس Skills of Teaching

تعني القيام بسهولة بعدد من الأعمال المحددة تحديداً إجرائياً والتي يمكن ملاحظتها والتي تفيد في تعليم التلاميذ⁽⁷⁴⁾.

ويمكن تحليل كل مهارة من مهارات التدريس إلى ثلاثة مكونات هي :

1 - العمل الذي يؤديه المعلم : كأن يضع الأهداف السلوكية لدرسه وأن يحدد الوسائل التعليمية المناسبة لدرسه أو يسأل أسئلة تثير دافعية التلاميذ للتعلم أو تحديد استراتيجيات مناسبة لدرسه وكذلك مهارته في وضع أسئلة تقويمية لدرسه.

2 - المؤشرات التي تدل على المهارة : أي أنواع السلوك الملاحظ

مباشرة من خلال موقف الملاحظة.

3 - مدى السهولة في أداء العمل التدريسي : ويتضمن هذا الجانب تقدير الأداء عن طريق ملاحظة السلوك وإصدار حكم شامل على السهولة في أداء المهارة يتطلب نوعان من القياس لمؤشرات تلك المهارة لقياس مهارة صياغة الأسئلة وتوجيهها وقياس تصرف المعلم بشأن إجابات التلاميذ الشفوية.

4 - مهارات قرائية Reading skills

وتعني القيام بمهارات القراءة الصامتة والجهرية والقراءة السريعة واستخلاص الأفكار من خلال هذه القراءة السريعة والانتهاء من قراءة مجموعة من الصفحات في أقل وقت.

5 - مهارات كتابية Writing skills

وتعتمد على قدرة الفرد على الكتابة بسرعة وإتقان والدقة في استخدام الخطوط في الكتابة.

6 - المهارة العقلية Intellectual skill

هي المهارة التي تتطلب نشاطاً ذهنياً معيناً مثل القدرة على التمييز والتفسير والاستنتاج والتعرف والملاحظة⁽³⁶⁾، فمهارة رسم عمود من نقطة معلومة أ إلى مستقيم معلوم ل مثلاً باستخدام الفرجار وإثبات ذلك مهارة عقلية وعملية، وعندما يستخدم التلميذ أسلوب حل المشكلات في حل مشكلة ما فهذه مهارة عقلية وعندما يقوم التلميذ بحل تمرين أو مسألة رياضية فهذه مهارة عقلية.

7 - المهارات الرياضية الأساسية Mathematical skills

وهي القدرة على استخدام الطرق الرياضية الإجرائية أو الخوارزميات مثل إجراء العمليات الحسابية والاستقراء الرياضي أو الاستدلال أو التجريد⁽⁵¹⁾.

ويجب أن نميز بين مفهومي الخوارزمية والمهارة، فالخوارزمية هي الطريقة الروتينية للقيام بعمل ما مثل إيجاد خارج قسمة عدد مكون من أربعة أرقام على عدد مكون من رقمين أو إيجاد حاصل ضرب عددين أو إيجاد قيمة

تقريبية للجذر التربيعي لعدد أصم مثل $\sqrt{17}$ بطريقة القلصادي حيث :

$$\frac{\frac{b}{\frac{b}{12} + 12} + 1}{2} = \sqrt{b+2}$$

إذن فالمهارة تتضمن الخوارزمية والدقة والسرعة والإتقان.

ويعرف «رازينج» المهارات الرياضية الأساسية بأنها تلك القدرات المرتبطة بالرياضيات والتي ينبغي اكتسابها لكي يتمكن المرء من السلوك كمواطن.

ويرى «وليم عبيد» أن المهارات يجب أن تتسع لكي تشمل مهارات عقلية دنيا ومتوسطة وعليا وأن تتطور طردياً مع تطور الفكر البشري والتقدم التكنولوجي وازدياد التحديات التي يواجهها الإنسان فلا تقتصر على مجرد المهارات الحسابية والجبرية واستخدام القوانين آلياً كما هو الحال عند تطبيق طرق التفاضل والتكامل لدوال معدة خصيصاً للاستسلام لتلك الأساليب والخضوع لتلك القوانين ويوضح المهارات التي يجب أن يكتسبها التلميذ في نهاية المرحلة الثانوية⁽⁵¹⁾:

- أ - إجراء العمليات الحسابية والجبرية والتحليلية المناسبة.
- ب - إجراء عمليات التقريب والتقدير الكمي وعمليات القياس.
- ج - التعامل مع الأشكال الهندسية في بعدين وثلاثة أبعاد.
- د - الوعي بمدى معقولية النتائج التي يتم الحصول عليها عند حل المسائل والتمارين.
- هـ - إنشاء وقراءة وتفسير الجداول والأشكال البيانية.
- و - استخدام الأساليب الرياضية في التفكير والتخطيط واكتشاف الظواهر وإعادة تنظيم الأفكار والمعطيات والأبنية أو التراكيب لمجموعة معينة من المعلومات.

- ز - استخدام حاسبات الجيب والتعامل بإحدى لغات الحاسب الآلي (الكمبيوتر) وقدر من مهارة البرمجة والتفاعل مع تشغيل المعلومات.
 - ح - استخدام الأسلوب الكمي في معالجة المواقف المناسبة من مشكلات الحياة اليومية.
 - ط - استخدام الأساليب الرياضية في حل المشكلات بصفة عامة.
- ويعرف بعض التربويين الرياضيين المهارات الرياضية الأساسية بأنها :
- أ - إدراك المفاهيم والأساليب الرياضية الخاصة بالعمليات الحسابية.
 - ب - المهارة في استخدام تلك المفاهيم في إجراء العمليات الحسابية.
 - ج - المهارة في حل المشكلات (استخدام أسلوب حل المشكلات).
 - د - المهارة في استخدام أسلوب التفكير على المستوى الإبداعي.
 - هـ - هناك أنواع كثيرة من المهارات نذكر منها : المهارة اليدوية، المهارة الحركية، المهارة اللغوية، المهارة القرائية، مهارات الاتصال، مهارات الاستماع، المهارات المكتبية، مهارات إدراكية، مهارات تقنية، مهارات كتابية، مهارات تصورية، مهارات التعرف.

عوامل اكتساب المهارة

ينبغي للمعلم أن يكون ملماً بالعوامل التي تساعد على أن يكتسب التلميذ المهارة من هذه العوامل⁽¹³⁾:

- 1 - الممارسة والتمرين.
- 2 - أن تكون فترات الممارسة قصيرة وأن تتوزع بدلاً من التجميع.
- 3 - أن تمارس المهارة ككل وليست مجزأة وأن تكون بالصورة المطلوبة.
- 4 - التركيز على السرعة فهي تساعد في اكتساب المهارة.

شروط تعلم المهارة

1 - اكتساب المهارة Acquisition of skill

من الشروط اللازمة للتعلم هذه المهارة هو أن يكون المتعلم قد اكتسب هذه المهارة، وهناك من العوامل التي تساعد على اكتساب المهارة مثل الممارسة والسرعة.

2 - الأداء Performance

وهذا الشرط يستلزم أن يقوم المتعلم بأداء هذه المهارة في فترات مختلفة أو عندما يطلب منه ذلك لأن الابتعاد عن الأداء بفترات طويلة قد يؤدي إلى نسيان أو القصور في المهارة.

3 - التغذية الراجعة Feedback

عموماً فالتغذية الراجعة التي تأتي مباشرة بعد الأداء تساعد على التعلم، كذلك فإن نقلة المعلومات في التغذية الراجعة لها أثر كبير وميسر على تعلم المهارات وذلك عندما يخبر المتعلم بنزجة قربه من الأداء المستهدف، فعندما يخبر التلميذ المتسابق عن الزمن الفعلي الذي قطع فيه المسافة عدواً وأن ذلك لرقم قريب من الرقم العالمي لهذه اللعبة تعمل تغذية رجعية (مرئدة) لدى اللاعب وتحمده في تحقيق زمن أفضل بمزيد من المران والجهد.

(4-7) أسباب القصور في المهارات الرياضية الأساسية

نما كمن تدريس المهارات الرياضية هو الأساس في هذا المحور من دراسة لتلك لابد من الأخذ في الاعتبار الأسباب التي تؤدي بالتلاميذ إلى قصور في المهارات الرياضية، من هذه الأسباب :

أ - قلة اهتمام المعلمين بتعلم المهارات مع ظهور الآلات الحاسبة وأجهزة الكمبيوتر وانتشارها بشكل واسع بين الناس.

ب - تباع المعلمين طرائق تدريسية غير فاعلة في تنمية المهارات لدى تلميذهم وكذلك عدم استئثارها لدافعية التلاميذ وإثارة حماسهم للتدريب

على المهارات وتشبيها بل وقد تثير هذه الطرائق التدريسية الملل والرتابة لدى التلاميذ.

ج - الاستقرار إلى الميل والاستعداد عند المتعلمين في التعامل مع الأعداد والرموز وغيرها من المفاهيم الرياضية المجردة للوصول إلى كفاية عالية في اكتساب المهارات المطلوبة.

د - اعتقاد البعض أن تعلم المهارات أصبح غير ضروري هذه الأيام بسبب التقدم التكنولوجي الواسع في مجال الكمبيوتر والألات الحاسبة والعقول الإلكترونية.

هـ - عدم اهتمام المعلمين بتعليم هذه المهارات والتركيز عليها كحائب مكمل للجانب المعرفي لدى المتعلم حيث يكتفي المعلم بإعطاء التلاميذ الجانب النظري.

دور المعلم في تنمية المهارات الرياضية

إن تعلم أي مهارة يعني إحداث تغير في سلوك المتعلم، ولما كانت المهارات تتدرج من البسيطة إلى المعقدة أو مهارات عقلية عليا ومهارات عقلية وسطى ومهارات عقلية دنيا، لذلك نجد أن هناك فروقا فردية بين المتعلمين في تعلم هذه المهارات.

وعلى ذلك فنوع المهارة صعوبتها أو سهولتها والفروق الفردية بين المتعلمين من العوامل التي تؤثر في تعلم المهارة والتي ينبغي للمعلم أن يدرك ذلك ويراعيها فعندما تكون المهارة من النوع المعقد والتي تتطلب على عدة مهارات بسيطة يمكن للمعلم من تجزئة هذه المهارة إلى مهارات أبسط يسهل تعلمها.

ولقد أثبتت الدراسات عدم وجود ارتباط أو علاقة ارتباطية بين الذكاء العام وتعلم مهارة معينة.

وعندما يكتسب المتعلم مهارة ما ويزداد مستوى أدائه فيها مصحوباً بالسرعة والدقة فإننا نقول أنه تم تنمية هذه المهارة.

ولكن ما هو دور المعلم في تنمية المهارات ؟ ٢٥

✓ 1 - يجب أن يعمل المعلم جاهداً على إتاحة الفرصة لتلاميذه لممارسة المهارات، فممارسة الأنشطة ضرورة لتعلم المهارة فأعطاء التلميذ الصورة العامة للحد العام في المتواليات الحسابية أو الهندسية ليس معناه أن التلميذ قد أتقن إيجاد الحد الخامس أو الحد العشرين ولكن بالممارسة من خلال مجموعة من التطبيقات المتنوعة يتمكن التلميذ من هذه المهارة.

✓ 2 - استخدام المعلم للتوجيه اللفظي والتعزيز للمتعلم عند استخدامه أو تعلمه للمهارة وذلك عن طريق الإرشاد والنصح وتوضيح القاعدة المستخدمة يفيد المتعلم ويجنبه بعض المخاطر الناجمة عن الخطأ في ممارسة هذه المهارة.

✓ 3 - أن يحرص المعلم على تعليم تلاميذه الدقة في الأداء أو التعبير عند تعليمهم للمهارة والجدير بالذكر أن الدقة والتركيز في المهارة تختلف عن السرعة في المهارة وإذا ما اجتمعت الدقة والتركيز والسرعة كان الإتقان وبالتالي تحقق الهدف من المهارة.

✓ 4 - استخدام الأنشطة المعملية في تدريس الرياضيات تمثل موقفاً يمارس فيه المتعلم مهارات الملاحظة والاستقراء والاستنتاج والتي تنمي لديهم اتجاهات موجبة نحو المادة الدراسية، فالتلميذ عرف من معلمه أن قيمة عجلة الجاذبية الأرضية 9.8 م/ث² أو 32 قدم/ث²، ولكن عندما يتيح المعلم الفرصة للتلميذ لاستخدام آلة أثود لتعيين قيمة عجلة الجاذبية الأرضية فالتعلم في هذه الحالة يكون ذا معنى وبقاى الأثر.

✓ 5 - يجب أن يكون المعلم موجهاً وناصباً ومُحفزاً لدافعية التلاميذ نحو تعلم المهارات وأن يوفر المناخ التدريسي المناسب داخل حجرة الدراسة، فالمناخ الاستكشافي ضروري لتنمية المهارات، كما أن عبارات الاستحسان والشكر تكون أفضل من عبارات اللوم التي يوجهها بعض المعلمين إلى تلاميذهم عندما يخطئ المتعلم، فالتوتر والشعور بالضيق لدى المتعلم قد يقود إلى مزيد من الأخطاء والتي إن تراكمت قد تؤدي إلى نتائج سلبية.

✓ 6 - استخدام المعلم العروض العملية المعملية وعمليات العلم مثل الملاحظة والوصف والتفسير والتصنيف وفرض الفروض والاستنتاج والتوصل إلى التعميمات الصحيحة، كل ذلك يساعد في تكوين وتنمية المهارات العملية ومهارات القياس لدى التلاميذ وبالتالي الفهم مع التطبيق الجيد للمادة الدراسية وبالتالي تحقيق الأهداف الدراسية.

(5-7) المهارات الرياضية الأساسية

أولاً : الأرقام والأعداد

- 1 - قراءة الأعداد وكتابتها حتى البلايين.
- 2 - معرفة القيمة المكانية (المنزلية) للرقم.
- 3 - معرفة الصور المختلفة للأعداد (قراءتها - كتابتها - تحويلها).
- 4 - النسبة المئوية - الأرقام الرومانية - الصيغة العشرية - الصورة الكسرية للعدد.
- 5 - استخدام الأعداد الصحيحة والحقيقية في حل المسائل.
- 6 - كتابة مضاعفات الأعداد.
- 7 - تحويل الكسر العادي إلى كسر عشري.

ثانيًا : العمليات الحسابية وخصائصها

- 1 - إدراك خصائص العمليات وبعض الأعداد.
- 2 - إعطاء أعداد نسبية مكافئة لأعداد أخرى مثل $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$.
- 3 - استخدام الخوارزميات المعرفة على الأعداد النسبية.
- 4 - حل مسائل على النسبة والتناسب والنسبة المئوية.
- 5 - تقدير النتائج وتقريبها وإصدار أحكام على معقولية الأجوبة.

ثالثًا : الجمل والعبارات الرياضية

- 1 - تكوين عبارات رياضية من مسائل لفظية.
- 2 - حل معادلات خطية بسيطة.
- 3 - تحويل الجمل والعبارات الرياضية من الصورة اللفظية إلى الصورة الرمزية.

رابعًا : الهندسة

- 1 - تمييز الخطوط المتوازية والمتعامدة والمتقاطعة.
- 2 - تصنيف الأشكال الهندسية المستوية من خلال صفاتها.
- 3 - حساب مساحات الأشكال الرباعية والمثلثات والدوائر.
- 4 - إدراك مفاهيم التطابق والتشابه والتحويلات الهندسية.

خامسًا : القياس

- 1 - استخدام مقاييس الطول والحجم والمساحة والوزن والزمن.
- 2 - قياس الطول والحجم والمساحة والوزن والحرارة والزوايا.
- 3 - التحويل من وحدات قياس إلى أخرى.
- 4 - قراءة الخرائط وتقدير المسافات بين الأماكن.

سادسًا : العلاقات والاقترانات (الدوال)

- 1 - تفسير المعلومات من خلال الأشكال البيانية والرسومات.
- 2 - تطبيق مفاهيم النسبة والتناسب.

- 3 - كتابة عبارات وجمل تظهر العلاقات بين الكميات مثل $<$ ، $\geq$
- 4 - دراسة مفهوم العلاقة والتطبيق (الاقتران) أو الدالة.

سابعاً : الإحصاء والاحتمالات

- 1 - تحديد مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت.
- 2 - دراسة دالة الاحتمال ومسائل احتمالية على حجر النرد والنقود.
- 3 - دراسة الوسائل المستخدمة في التنبؤ والتقدير من العينات.
- 4 - تقدير الإجابة للحسابات والمسائل الحسابية.
- 5 - دراسة تقديرات تعداد السكان والمواليد والوفيات.
- 6 - دراسة وفهم اختبارات الفروض (الصفريّة - البديلة).

ثامناً : التعليل الرياضي

- 1 - إعطاء أمثلة نافية لصدق عبارة.
- 2 - جمع المعلومات والبيانات التي تدعم نتيجة ما وعرضها.
- 3 - اختبار ووصف الأخطاء في الأفكار الرياضية المعتمدة على البيانات الإحصائية.

تاسعاً : الرسم

- 1 - رسم الأشياء بمقياس رسم مناسب وتحديد الأبعاد الحقيقية من خلال الرسم.
- 2 - قراءة الرسومات وتحليل النتائج منها.
- 3 - تحليل الرسوم التي تمثل العلاقة بين متغيرات.

عاشراً : الرياضيات المالية

- 1 - التخطيط لميزانية الفرد والأسرة في المجتمع.
- 2 - تقدير التكاليف الفعلية للاحتياجات الفردية.
- 3 - حساب الضرائب والفوائد والفواتير الأخرى للفرد.
- 4 - استخدام المعادلات البسيطة لمصاريف الحياة اليومية والأرباح⁽⁵⁴⁾.

(6-7) استراتيجيات تدريس المهارات

هناك مجموعة من الاستراتيجيات (تحرّكات يقوم بها المدرس داخل حجرة الدراسة) والتي يستخدمها المدرس عند تدريسه للمهارات وهي شبيهة باستراتيجيات تدريس التعميمات أو المبادئ والتي سبق أن تعرضنا لها. والهدف من تدريس هذه الاستراتيجيات هو تحقيق الكفاءة لدى التلاميذ عند تعلمهم لهذه المهارات.

من هذه الاستراتيجيات :

1 - استراتيجيات التقديم - الإلقاء Exposition Strategy

وهذه الاستراتيجيات تكون دائماً في بداية الدرس، ويمكن أن تقسم إلى ثلاثة أنواع :

1 - استراتيجيات الانتباه

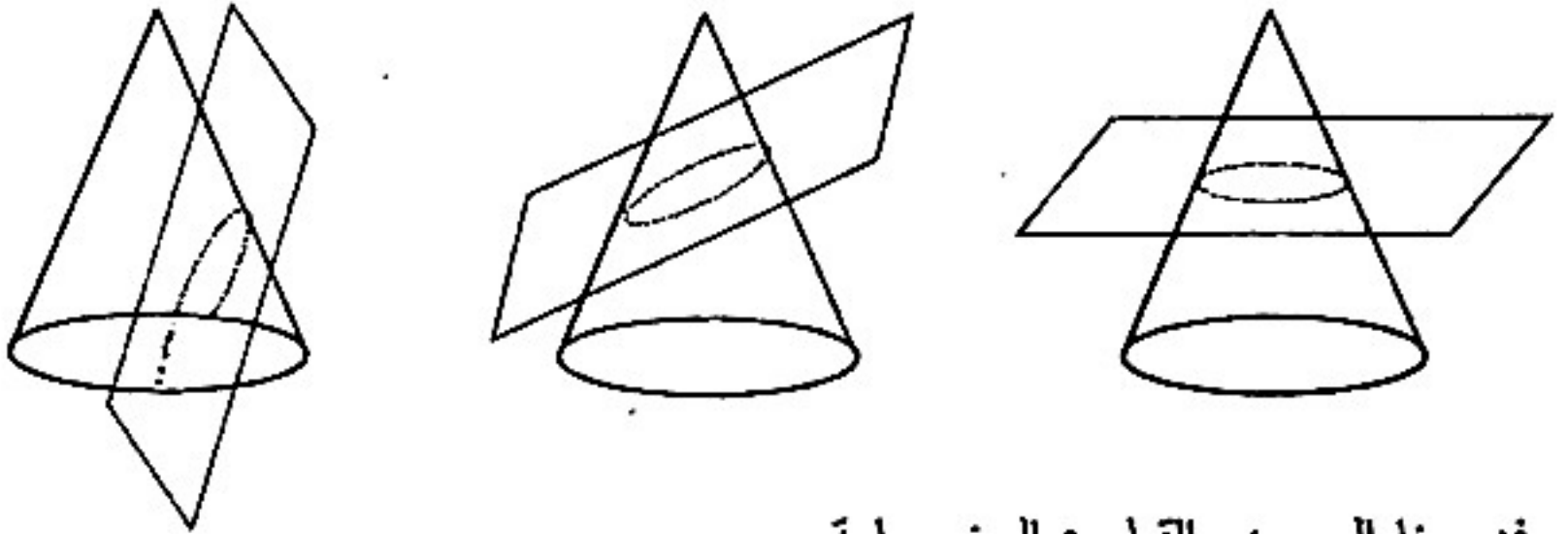
ويهدف المعلم في هذه الاستراتيجية إلى تهيئة التلاميذ للدرس وتركيز انتباههم إلى ما سوف يقدمه إليهم وهذه تكون شبيهة بطرق تقديم الإعلانات عن منتج معين، فكتابة المعلم لعنوان الدرس هو بمثابة مثير يحاول به جذب انتباه التلاميذ وعندما يتوجه المعلم لسؤال التلاميذ عن درجة الحرارة المتوقعة لهذا اليوم ؟ يجيب أحد التلاميذ 24 درجة.

فيعقب المدرس هل هذه الدرجات هي نفسها التي نقيس بها الزاوية ؟ هل هي الدرجات التي تحصلون عليها في امتحان مادة الرياضيات ؟ هل هناك أنواع أخرى من الدرجات تعرفونها ؟

ماذا تعرفون عن الدرجات الفهرنهيّة ؟ وماذا عن الدرجة المعيارية ؟ وهذا هو موضوع الدرس لهذا اليوم.

أو عندما يحضر المعلم معه مجسم لمخروط قائم ويقوم بسؤال التلاميذ ما هو الشكل الذي على الطاولة ؟

ماذا لو قمنا بقطع هذا المخروط بمستوى أفقي موازي للقاعدة ؟
 ما هو المنظور الذي نجده بعد عملية القطع ؟
 ماذا لو قمنا بقطعه بمستوى مائل هل المنظور الذي نجده بعد عملية القطع هو
 دائرة أيضا ؟
 ماذا لو قطعنا المخروط بمستوى رأسي لأحد الجوانب ؟
 هل الشكل الناتج دائرة أم قطع ناقص أم يختلف عنهما ؟



فدرسنا اليوم هو القطوع المخروطية.

ب - استراتيجيات الهدف

لقد أثبتت كثير من الدراسات التربوية أن معرفة التلاميذ بالأهداف
 المستوخاة من الدرس تزيد من تعلمهم وتفاعلهم أثناء الدرس واستراتيجية الهدف
 تعتمد على أن يقوم المعلم بتوضيح الأهداف الخاصة (السلوكية) للدرس.
 فإذا كان موضوع الدرس هو حل المعادلة من الدرجة الثانية على الصورة
 $أس^2 + ب س + ج = 0$ باستخدام طريقة القانون يمكن أن يبدأ المعلم درسه
 بتوضيح أنه في الدرس السابق قمنا بحل المعادلة من الدرجة الثانية باستخدام
 طريقة التحليل للمقدار الثلاثي لكن هناك طريقة روتينية سهلة يمكن اتباعها لحل
 مثل هذه المعادلة باستخدام القانون التالي :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4ج}}{2}$$

والذي سنشتقه من الصورة العامة للمعادلة التربيعية $اس^2 + ب س + ج = 0$ ما المقصود بالرموز س، أ، ب، ج اعتقد أنكم تذكرونها جيداً. هنا أوضح المعلم الهدف من درسه.

ج - استراتيجية الدافعية

المعلوم أن الدوافع هي طاقات كامنة في الكائن الحي والتي تدفعه لأن يسلك سلوكاً معيناً في العالم الخارجي من أجل إشباعها، وقد يكون الدافع نفسياً أو فسيولوجياً⁽¹³⁾.

وللدوافع ثلاث وظائف :

- 1 - تنشيط الكائن الحي.
- 2 - توجيه السلوك نحو هدف محدد.
- 3 - مساعدة الفرد على انتقاء الاستجابات الصحيحة والعمل على تدعيمها.

والمعلم في هذه الاستراتيجية يحاول أن يحرك هذه الطاقات الكامنة لدى التلاميذ بمعنى استثارة دوافعهم عن طريق التشجيع، ولعل معرفة التلاميذ بأهمية العمل الذي يقومون به يسهل هذه العملية، فعندما يخبر المعلم تلاميذه عن التطبيقات العملية لحساب التفاضل خاصة عند دراسة أو استخدام مفهوم القيم القصوى المحلية في حساب أقل خسارة أو أكبر قيمة للربح أو أكبر حجم أو أقل تكلفة ممكنة فإنه بذلك يستثير دافعيتهم للمعرفة وللتعلم.

ولقد قدم «جارت رينون» Garth Runion عام 1972 مجموعة من الطرق التي يمكن أن يستخدمها المعلم في سبيل تحقيق استراتيجية الدافعية عند البدء في درسه⁽⁴⁵⁾ :

- ط1 : ذكر الأهداف السلوكية للدرس.
- ط2 : إعطاء التلاميذ الخطوط العريضة لأهم نقاط الدرس.
- ط3 : ربط الدرس السابق المؤلف لدى التلاميذ بالموقف الجديد غير المؤلف لديهم.

هذا : فبعد اعادة التارجية المصححة لموضوع بعد تدريس قولين اعرابية
لارضية يونس يمكن توضيح بعض المعلومات التارجية عن اعداد
يونس ونصه ختومه هذه القوائم

ط ٥ : مراجعة المعلومات السابقة والتي تكبد في الدرس الجديد

ط 6 : وضع التلاميذ في موقف مشكل خاص بالدروس الجيد وبالتالي بعض
التلاميذ الفرصة في التفكير في الوصول إلى حل لهذه المشكلة. وهذه
تريد من حب الاستطلاع لدى التلاميذ مشكلة ومعرفة حل مشكلة

2 - استراتيجيات التأكيد أو الإثبات

في هذه الاستراتيجيات يركز المعلم ويؤكد على الشهادة من خلال التأكيد
على خطواته. فعند يجب المعلم من التلاميذ حل المعادلة المعطوفة لمرحلة
من الصورة $س = ١٠$

يكون تأكيد المعلم على كيفية التخص من المعطوفة - بالتخاد المعكوس
الضربي المعطوفة - والتأكيد على خطوات حساب المعكوس الضربي
المعطوفة ومن ثم التأكيد على الصورة الجيدة $س = ١٠$ وبالتالي التأكيد
على صحة الضرب الجيدة والآخره ومن ثم حساب قيد المجاهيل في المعادلة
المعطوفة.

3 - استراتيجيات التفسير

في هذه الاستراتيجية يقوم المعلم بتفسير الخطوات التي يقوم بها أو تكرر
السبب في ذلك أو لماذا استخدمت هذه الخطوة قبل غيرها فعند حل المعادلة
س = 10 يفسر المعلم لماذا استخدم المعكوس الضربي عند ذلك وهو $\frac{1}{3}$
مباشرة؟ وعندما يقوم المعلم بحل المعادلة س < 9 فعند الضرب في العدد
 $\frac{1}{3}$ - يحصل المتباينة إلى الصورة الجيدة س > - $\frac{1}{3}$ يفسر لماذا تغير اتجاه
المتباينة.

وعند التعامل مع الصورة س < $\frac{1}{2}$ = $\frac{3-2}{5-1}$ يفسر المعلم لماذا قدم

بالضرب في مرافق العدد $1 - 5$ ت وهو $1 + 5$ ت بسطاً ومقاماً لحساب قيمة المجهول في المعادلة وهو س.

4 - استراتيجية التحقق

في هذه الاستراتيجية يتم التحقق من صحة المهارة بطرق مختلفة سواء كانت استنتاجية أم استقرائية والتي يقوم بها المعلم للتحقق من صحة قيام التلميذ بأداء المهارة على أكمل وجه.

فعندما يطلب المعلم من التلاميذ حساب قيمة الجذر التربيعي للعدد 34254 بالطريقة العامة يقوم المعلم ببعض التوجيهات للتلاميذ للتحقق من صحة الحل عن طريق تربيع الإجابة أو يقوم المعلم نفسه بمراجعة خطوات الحل التي قام بها التلاميذ.

وعندما يعطي التلاميذ سؤالاً لحل المعادلة التربيعية بطريقة التحليل يقوم المعلم بالتوجيهات للتلاميذ للتأكد من صحة بعض في المعادلة عن القيد المستنتجة التي توصفها إليها فإذا كان ناتج القيد بعض في المعادلة يساوي صفراً فالإجابة صحيحة.

وعندما يقدم لهم سؤالاً في الإكمال في المنطق $(أ + ج) = ...$ فإنه يقدم التوجيهات للتحقق من صحة إجابته بعمل جدول الصواب والخطأ للحملة الأصلية وللحملة المكافئة للتحقق من صحة الإجابة.

5 - استراتيجية التدريب (المران)

وتشمل هذه الاستراتيجية

أ - التعزيز (السنة كالمعزز هو أكثر السلوك حدوثاً وتكراراً) والتعزيز أي مثير يريد من احتمالية ظهور الاستجابة.

ب - التغذية الراجعة : وهي المعلومات المتوفرة لدى التلميذ التي

تجعله من الممكن أن يقارن بين أدائه الحقيقي وبين الأداء المقنن للمهارة، وفي بعض الأحيان يشار إلى التغذية الراجعة على إنها معرفة النتائج.

ج- تنظيم التدريب: بمعنى التدرج في التدريب من البسيط إلى المعقد.

د - التنوع في التدريب : بمعنى إعطاء مزيد من التدريبات المتنوعة في الكم والكيف والتي تخدم الوصول إلى الكفاءة في المهارة.

تصنيف «كيف» للمهارة⁽¹⁾

- 1 - التقليد : ويشمل النشاطات التي لا تتطلب تناسقاً بين العضلات.
- 2 - التناول : ويشمل النشاطات التي تتعلق باتتباع توجيهات أو العمل وفق تعليمات.
- 3 - التدقيق : وهي القدرة على زيادة سرعة العمل وإدخال تعديلات إيجابية.
- 4 - التنسيق : التنسيق بين سلسلة من الحركات بالتوصل إلى تتابع مناسب.
- 5 - التطبيع : جعل العقل آلية روتينياً لدرجة أن يصبح استجابة الآلية أوتوماتيكية فورية.

تصنيف مبسط للمهارة

ويتم بملاحظة أداء شخص ماهر وتقليد العناصر الأساسية للمهارة ومن ثم التمرين ويتضمن تكرار تتابع عناصر المهارة مع تقليل الجهد الواعي للأداء تدريجياً وبعد ذلك إتقان المهارة مع احتمال زيادة هذا الإتقان.

(*) **تعليمات : درس في العلم الكسري**

الدرس الأول

الدرس الأول : تعريف الكسري
 الكسري هو الذي يكون فيه عددان
 أحدهما فوق الآخر
 والخط الذي بينهما
 يسمى كسرياً
 والعدد الذي فوق الخط
 يسمى البسط
 والعدد الذي تحت الخط
 يسمى المقام

أمثلة على الكسري

- 1 - $\frac{1}{2}$ كسري
- 2 - $\frac{3}{4}$ كسري
- 3 - $\frac{5}{6}$ كسري
- 4 - $\frac{7}{8}$ كسري
- 5 - $\frac{9}{10}$ كسري
- 6 - $\frac{11}{12}$ كسري
- 7 - $\frac{13}{14}$ كسري
- 8 - $\frac{15}{16}$ كسري
- 9 - $\frac{17}{18}$ كسري
- 10 - $\frac{19}{20}$ كسري

11 - أن يحسب ارتفاع مبنى أو برج باستخدام زاوية الارتفاع أو الانخفاض.

ثالثاً : التعميمات

1 - الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية وإذا راعينا الاتجاه تسمى زاوية موجهة.

2 - دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي وحدة الأطوال.

3 - القياس الدائري لزاوية مركزية = $\frac{\text{طول القوس المقابل لها}}{\text{طول نصف قطر الدائرة}}$

4 - للتحويل من التقدير الدائري إلى التقدير الستيني نضرب في $\frac{180}{\pi}$.

5 - للتحويل من التقدير الستيني إلى التقدير الدائري نضرب في $\frac{\pi}{180}$.

6 - الزاوية نصف القطرية هي زاوية مركزية تقابل قوساً طوله يساوي طول نصف قطر دائرتها وتساوي تقريباً $17^\circ 57'$

7 - مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2} r^2 \theta$ حيث r هو مقاسة بالتقدير الدائري.

8 - يقال للزاوية الموجهة أنها في الوضع القياسي إذا كان رأسها نقطة الأصل وكان ضلعها الأول منطبقاً على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

9 - إذا كانت الزاوية الموجهة في وضع قياسي فإنه يقال إنها في الربع الذي يقع فيه ضلعها الثاني.

10 - إذا كانت (س، ص) هي النقطة المقابلة للعدد θ (الزاوية التي قياسها θ) على دائرة الوحدة فإن :

(أ) دالة الجيب (جا) تعطى بالعلاقة :

جا : $[0, 2\pi) \rightarrow \theta$ حيث جا $\theta = \text{ص}$

(ب) جتا : $[0, 2\pi) \rightarrow \theta$ حيث جتا $\theta = \text{س}$

(جـ) دالة الظل تعطى بالعلاقة :

$$\text{ظا} : [0, 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \leftarrow \text{ح}$$

حيث :

$$\text{ظا} = \frac{\text{جا}}{\text{جتا}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

11 - العلاقة بين دالتي الجيب وجيب التمام :

لكل $\theta \in [0, 2\pi]$ يكون :

$$\text{جا}^2 + \text{جتا}^2 = 1$$

12 - العلاقة بين النسب المثلثية للزوايا الخاصة :

$$\text{جا } (90^\circ - \theta) = \text{جتا } \theta$$

$$\text{جتا } (90^\circ - \theta) = \text{جا } \theta$$

$$\text{جا } (180^\circ - \theta) = \text{جا } \theta$$

$$\text{جتا } (180^\circ - \theta) = -\text{جتا } \theta$$

$$\text{جا } (360^\circ - \theta) = \text{جا } \theta$$

$$\text{جتا } (360^\circ - \theta) = -\text{جتا } \theta$$

13 - دالة القاطع (قا) :

$$\text{قا} : [0, 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \leftarrow \text{ح}$$

$$\text{قا} = \frac{1}{\text{جتا}}$$

14 - دالة قاطع التمام (قتا) :

$$\text{قتا} : [0, 2\pi] - \{0, \pi\} \leftarrow \text{ح}$$

$$\text{قتا} = \frac{1}{\text{جا}}$$

15 - دالة ظل التمام (ظتنا) :

ظتنا : $(0, 2\pi) - (0, \pi) \leftarrow \text{ح}$

$$\text{ظتنا هـ} = \frac{1}{\text{ظنا هـ}} \text{ أو } \text{ظتنا هـ} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$$

16 - قانون الجيب : في أي مثلث أ ب جـ

$$\frac{أ}{\text{جا ب}} = \frac{ب}{\text{جا أ}} = \frac{ج}{\text{جا ج}}$$

الزاوية الموجبة

أهداف الدرس

- 1 - أن يذكر الطالب الطالب تعريف الزاوية الموجبة.
- 2 - أن يذكر الطالب متى تكون الزاوية في وضع قياسي.
- 3 - أن يرسم زاوية معينة في الوضع القياسي.
- 4 - أن يستطيع الطالب تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية إذا علم قياسها.
- 5 - أن يتعرف الطالب على وحدة قياس الزاوية.
- 6 - أن يتمكن الطالب التحويل من تقدير ستيني إلى دائري والعكس.

مقدمة

لعلم حساب المثلثات أهمية كبرى سواء من الناحية التطبيقية أو من الناحية النظرية في مجال الرياضيات.

فمن الناحية التطبيقية نجد أن هذا العلم منذ نشأ مرتبطاً بعلم الفلك وله تطبيقات عديدة في حساب حركات النجوم والأجرام السماوية ودورة القمر والشمس والتقاويم المختلفة، وبعد استقلال حساب المثلثات عن الفلك استمرت التطبيقات العملية لحساب المثلثات في كثير من المجالات مثل الملاحة والطيران والأرصاد الجوية والهندسية.

أما من ناحية ارتباط حساب المثلثات بفروع الرياضيات الأخرى فهو مرتبط بجميع الفروع وخصوصاً التحليل الرياضي، الاستاتيكا، الأعداد المركبة، كما تدخل النسب المثلثية والدوال المثلثية في بناء كثير من المصوغات الرياضية وليس للمثلثات تطبيقات في مجال الرياضيات فحسب بل له تطبيقات في مجالات العلوم الأخرى التي تتعامل بالرياضيات، وفي عصرنا هذا قلما نجد علماً من العلوم أو مادة من المواد لا تعتمد على الرياضيات.

وهل تعلم أن قائد الطائرة يجب أن يكون قادراً على تحديد موضعه بالضبط فوق الأرض حيث يفترض أن الأرض كمستوى والمثلثات المستوية تعتبر أداة لتحديد موضعه وهذه كافية عندما يكون المطلوب مسافة صغيرة.

وهناك من يفترض أن النجوم تقع على سطح كروي هائل حيث تعتبر الأرض مركزها وهناك فإن الهندسة المستوية ليس لها مكان بل الهندسة المثلثية الكروية.

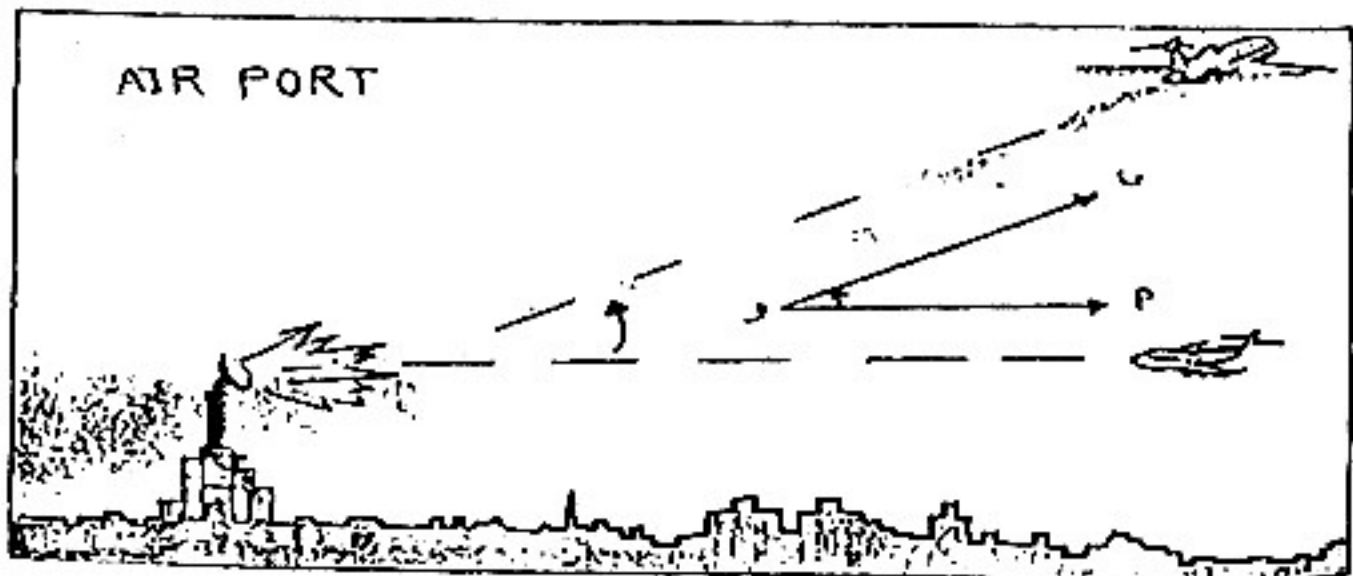
ولقد طور هذا اعلم (حساب المثلثات) في الاتصالات باستخدام خواص المثلث القائم.

ولقد استخدم قدماء المصريين والإغريق حساب المثلثات في عمليات المسح والملاحة والتنجيم، وفي العصر الحديث يستخدم حساب المثلثات في دراسة حركة الموجات والتيار الكهربائي والتوتر والصوت وغيرها، من هنا كان لابد من أخذ فكرة جيدة عن حساب المثلثات بدءاً من الدوال الدائرية وانتهاء بتحديد زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على هذا الموضوع في هذه المرحلة من الدراسة.

الوسائل التعليمية : مجموعة من الصور توضح فكرة الزاوية الموجهة.

مرحلة الكشف

تأمل الصورة التالية ثم أجب عن تساؤلات التي تليها :



نشاط (1-5)

س1 : ماذا توحى لك هذه الصورة ؟

س2 : ماذا يرسم شعاع الرادار عند متابعته لمسير طائرة لحظة دخولها المجال الجوي ؟

... ترسم زاوية ...

س3 : ما هي الزاوية ؟

... اتحاد شعاعين متحدين في الرأس ...

س4 : هل تذكر أنواع الزوايا التي درستها فيما سبق ؟

... الزاوية الحادة - القائمة - المنفرجة ...

س5 : ماذا نسمي الشعاعين و أ ، و ب بالنسبة للزاوية الموضحة في الرسم؟..

... ضلعي الزاوية ...

س6 : ما هو ناتج اتحاد الشعاعين و أ ، و ب ؟ ... زاوية ...

مرحلة تقديم المفهوم

الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة الابتداء (رأس الزاوية)

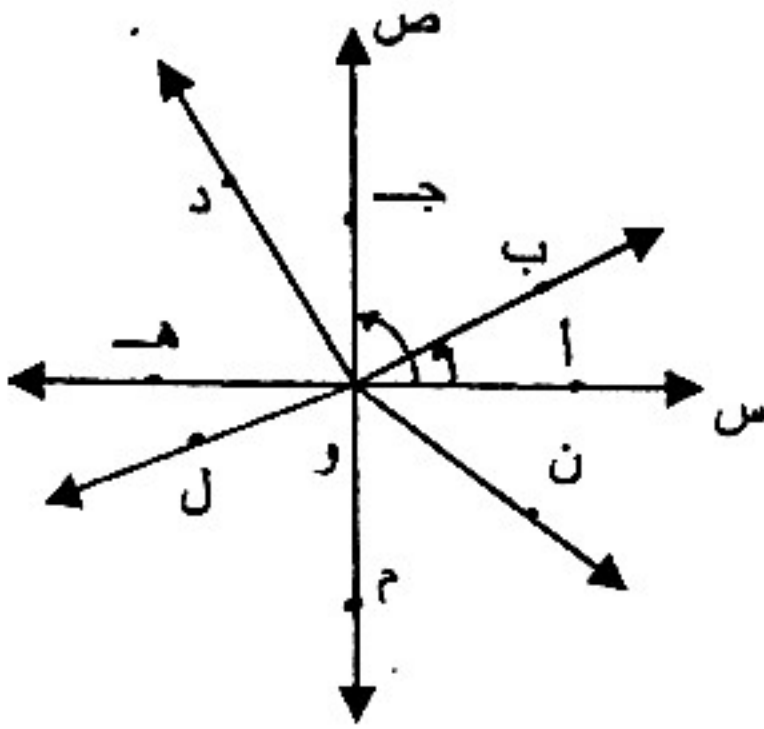
يسمى الشعاع الأول ضلع الابتداء، والشعاع الثاني ضلع الانتهاء

وتكون في الوضع القياسي إذا انطبق ضلع الابتداء على الاتجاه الموجب

للمحور السيني أو يوازيه.

نشاط (2-5)

في الشكل المجاور اكتب أسماء مجموعة من الزوايا في الوضع القياسي:



- 1 - $\angle \text{أوب}$ 5 -
- 2 - $\angle \text{أوج}$ 6 -
- 3 - $\angle \text{أود}$ 7 -
- 4 - $\angle \text{أوه}$ 8 -

نشاط (3-5)

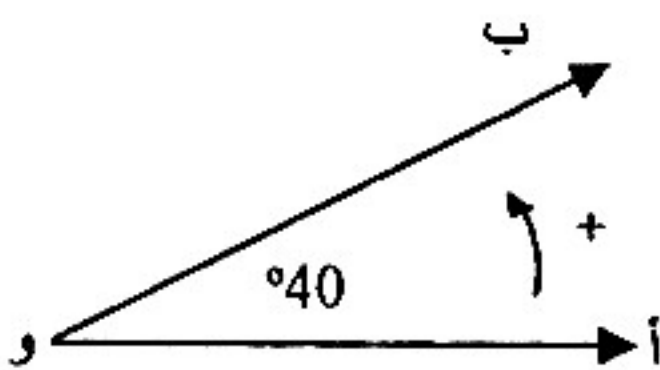
في الشكل المجاور أجب عن التساؤلات التالية :

س1 : هل تلاحظ اختلاف بين الزاويتين ؟ ...

(الاختلاف في الاتجاه للضلع الدائر)

س2 : هل الاختلاف في المقدار ؟

أم في الاتجاه ؟... (الاختلاف في الاتجاه)



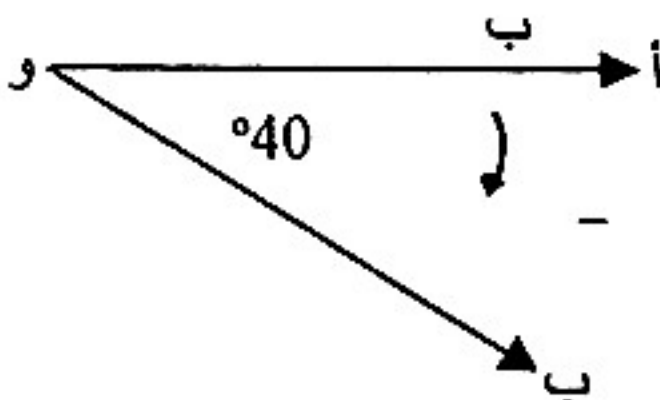
س3 : ما هو اتجاه دوران ضلع الانتهاء

هل هو مع اتجاه دوران عقارب

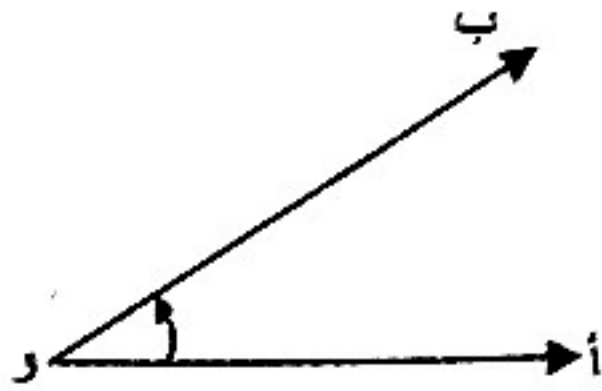
الساعة أم في اتجاه ضد دوران

عقارب الساعة ؟ ...

(ضد عقارب الساعة)

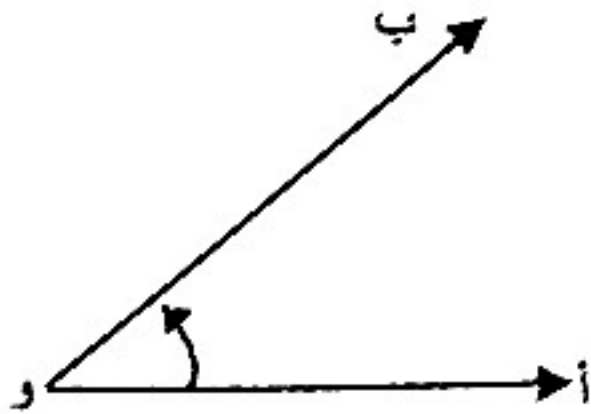


نشاط (4-5)



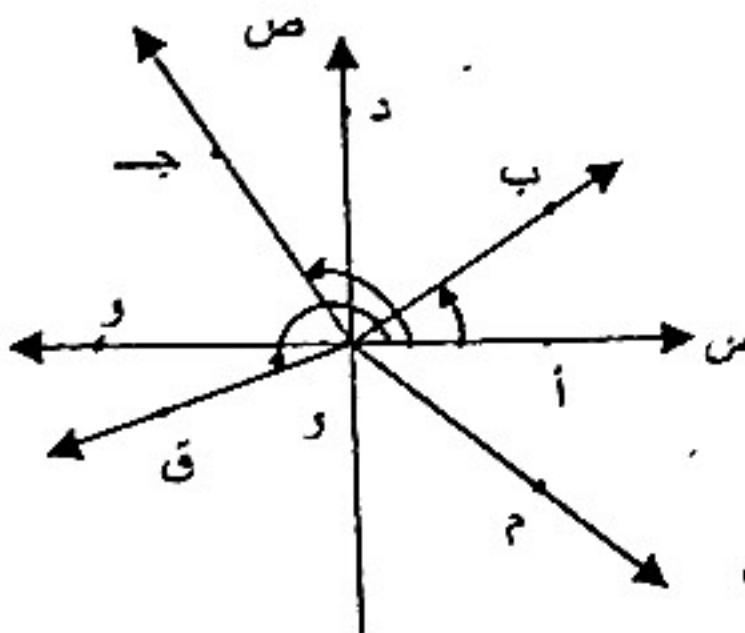
في الشكل المجاور هل هناك اختلاف بين اتجاه دوران ضلع الانتهاء في الترتيبين ؟ ...

(لا يوجد اختلاف في اتجاه دوران ضلعي الانتهاء)



نشاط (5-5)

في الشكل المجاور تقاطع المحور السيني مع المحور الصادي يقسم المستوى إلى أربع أرباع كما بالشكل. والمطلوب منك :



- 1 - حدد زاوية في الربع الأول مع تحديد اتجاه الدوران .. أ و ب
- 2 - حدد زاوية في الربع الثالث من تحديد اتجاه الدوران أ و ق
- 3 - حدد زاوية في الربع الرابع وأخرى في الربع الثاني مع تحديد اتجاه الدوران ... أ و م ، أ و ج

مرحلة تقديم المفهوم

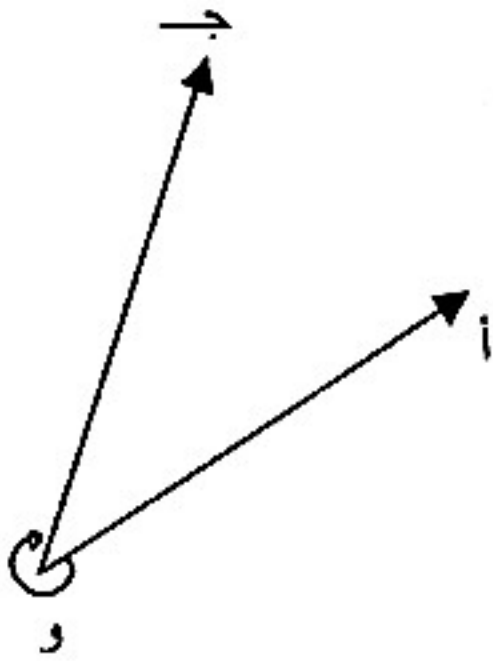
تكون الزاوية (أ، و ب) زاوية موجبة إذا راعينا اتجاه دوران ضلع الانتهاء وتكون موجبة إذا كان الدوران ضد اتجاه دوران عقربي الساعة.

تطبيق (1-5)

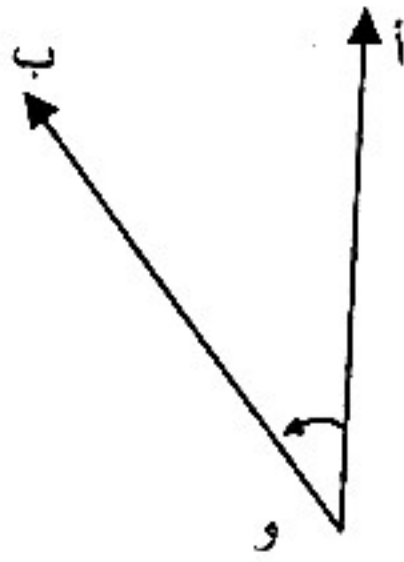
مرحلة التطبيق

س1 : ارسم مجموعة الزوايا التالية والتي قياساتها 60° ، 38° ، 120° ، 240° موضعاً ضلع الابتداء وضلع الانتهاء واتجاه الدوران.

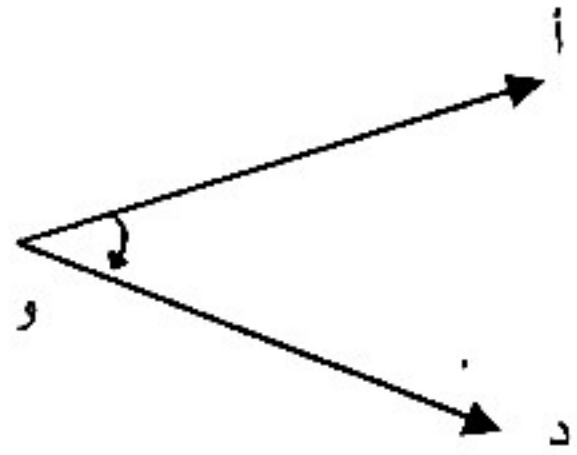
س2 : إذا كان $\vec{OA}$ هو ضلع الابتداء فحدد الزوايا الموجهة التالية من حيث القياس الموجب أو القياس السالب :



(3)
قياس سالب



(2)
قياس موجب



(1)
قياس سالب

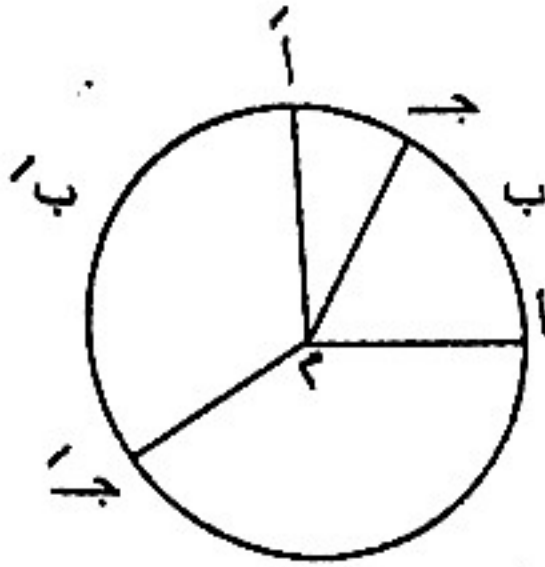
س3 : ارسم في المستوى الديكارتي مجموعة الزوايا التالية في الوضع القياسي 80° ، 120° ، 220° ، 330°

ملاحظات :

هذه الملاحظات تقدم للطلاب بهدف الاطمئنان إلى فهمهم لها.

سبق أن تعرف الطالب إلى مفهوم الدائرة ومركزها ونصف قطر الدائرة وكذلك الوتر، وإنه إذا فرضنا نقطتين على الدائرة فالمنحني الواصل بينهما على محيط الدائرة يسمى قوس.

وفي الشكل المجاور :



- 1 - زاوية أ م ج - تقابل القوس أ ب ج
- 2 - تسمى زاوية أ م ج - زاوية مركزية لأن رأسها يقع على مركز الدائرة م أ، م ج - نصفي قطرين في الدائرة.
- 3 - إذا قابلت زاويتان مركبتان في دائرة واحدة قوسين متساويين في الطول فإن هاتين الزاويتين تكونان متساويتين في القياس.

الفصل الثامن

التعليم البرنامجي

The Programming Learning

- (1-8) مقدمة
- (2-8) ما هو التعليم البرنامجي
- (3-8) المبادئ التي يبنى عليها التعليم المبرمج
- (4-8) مميزات وخصائص التعليم المبرمج
- (5-8) نواحي القصور في التعليم المبرمج
- (6-8) أنواع البرامج التعليمية
- (7-8) برنامج في الأسس
- (8-8) برنامج في اللوغاريتمات

الفصل الثامن التعليم البرنامجي

(1-8) مقدمة

التعلم عملية أساسية في الحياة، فالإنسان يتعلم كي يعيش، والمجتمع دائماً في تطور وتقدم مستمرين نتيجة لعمليات التعلم هذه.

والواقع أن كل مظاهر النشاط البشري هي نتاج عمليات التعلم، وعملية التعلم تختلف من فرد لآخر حسب مجموعة من العوامل مثل الممارسة والنضج والدافعية وغيرهم..

ونظراً لأهمية عمليتي التعليم والتعلم فقد دأب الكثير من علماء النفس والتربية على دراسة هذه الظاهرة ووضع النظريات الخاصة بالتعليم والتعلم.

ويعتبر التعليم البرنامجي من أساليب التعلم الجديدة والتي يمكن للفرد عن طريقها أن يتعلم ذاتياً أي معتمداً على قدراته الخاصة في التعلم.

ولقد شاع استخدام هذا النوع من التعليم في المدارس الأمريكية والاتحاد السوفيتي سابقاً وإنجلترا وفرنسا، وأخيراً بدأ الاهتمام في تعليم المواد الدراسية بطريقة التعليم البرنامجي في بعض الدول النامية.

ولعل أصول هذا التعليم يرجع إلى الطريقة الحوارية (طريقة المناقشة المقيدة) التي كان يتبعها سقراط وزملاءه عند تقديم المعرفة حيث التدرج مع التلاميذ من المعلوم إلى المجهول.

ولقد تقدمت هذه الأفكار على يد «برسي 1926, Pressey» عندما قدم أول آلة تعليمية الغرض منها تقديم مجموعة من الأسئلة وعلى المتعلم أن يستجيب على كل منها، وتقوم هذه الآلة بالتوضيح فيما إذا كانت الاستجابة صحيحة أم خاطئة وهذه الآلة تقوم على فكرة التعليم البرنامجي.

ولقد كان لأبحاث سكينر (Skinner, 1954) لبحث شروط التعلم على الحيوانات (الحمائم) إلى التوصل إلى أن تعلم التلاميذ بالمدرسة ينبغي أن يتشكل بواسطة سلسلة من التعزيزات.

ويصف «سكينر» هذا الأسلوب والذي يمثل أساس التعلم البرنامجي على النحو التالي :

- 1 - العرض المتدرج لتفاصيل أنماط سلوكية بالغة التعقيد مع المحافظة على شدة السلوك وقوته في كل مرحلة ومع تحديد السلوك النهائي المتوقع.
- 2 - أن العملية الكلية للإتقان والوصول إلى الكفاية في أي ميدان ينبغي أن تقسم إلى عدد كبير جداً من الخطوات الصغيرة جداً (أي تنظيم العمل في وحدات أو خطوات وعرضها متتابعة).
- 3 - يكون التعزيز مرهوناً بتحقيق كل خطوة أي بعد الاستجابة مباشرة.
- 4 - يجعل كل خطوة تالية صغيرة على قدر الإمكان.
- 5 - يمكن رفع تواتر التعزيز إلى حده الأقصى.
- 6 - يمكن تقليل النتائج المنفرة التي تترتب على الخطأ إلى الحد الأدنى، بمعنى أنه إذا عمم التلاميذ تعميماً خاطئاً فيجب استخدام التعزيز الانتقائي لتعليمهم أن يميزوا، كما إنه على المعلم أن يسأل نفسه بين الحين والحين عما إذا كان تلامذته يتعلمون في الأساس ليتجنبوا النتائج غير السارة لعدم المعرفة ولابد أن يدرك الأثر المتوقع للعقاب، كما برهنت عليه تجارب «سكينر» والتي تلقت فيها الفئران صدمات كهربية حتى تعلمت، لقد تعلمت الفئران بسرعة ولكنها نسيت بسرعة أيضاً وأصبحت تخاف البيئة التي ارتبطت بالعقاب، والعقاب الذي يستخدم مع التلاميذ في صورة السخرية منهم أو تقديم بقسوة قد يؤدي إلى نتائج مماثلة إلى النسيان السريع والاتجاه السلبي الخائف نحو المدرسة التي قد تعوق التعلم اللاحق⁽²¹⁾.

7 - يمكن تشكيل سلوك الفرد تدريجيًا عن طريق التحكم في التعزيز، أي عن طريق تعزيز أنواع السلوك المرغوبة وعدم تعزيز الأنواع الأخرى غير المرغوبة، هذا التدعيم أو التعزيز يزيد من نشاط المتعلم ومن اهتماماته بالتعلم وهذه يطلق عليها الجوانب الدافعية للتعلم⁽⁵⁾.

(2-8) ما هو التعليم البرنامجي ؟

التعليم البرنامجي نوع من التعليم الذاتي يؤدي إلى استيعاب الدارس للموضوع المطلوب دراسته عن طريق تقسيمه إلى خطوات أو عناصر صغيرة مرتبة ومتتابعة ويوجد بينها علاقة ويهدف إلى تجنب الدارس الأخطاء، أما إذا حدثت أخطاء فإن الدارس يقوم بتصحيحها بنفسه عندما يدرك العلاقات بين العناصر إدراكًا سليمًا وبذلك يتدرب الدارس على الطريقة الصحيحة التي تدعم (تعزز) مباشرة والتأكد من نتائج هذه الاستجابات، وبهذا الأسلوب يصل الدارس إلى تحصيل المادة العلمية المطلوبة أو النتائج المرغوبة فيها⁽⁵⁰⁾.

ويعرفه مجدي عزيز «بأنه نوع التعليم الذاتي الذي يأخذ فيه المتعلم دورًا إيجابيًا وفعالاً ويقوم فيه البرنامج بدور الموجه نحو تحقيق أهداف معينة، ويقصد بالبرنامج المعلومات المتصلة بموضوع معين مكيف بأسلوب التعليم البرنامجي»⁽⁴⁰⁾.

وعموماً فالتعليم البرنامجي يعتمد على نظرية التعزيز والتي نادى بها «سكنر» والتي تفترض أن الفرد يتعلم بطريقة أفضل عندما يدرك أن استجاباته صحيحة وإذا كان نشطاً أثناء فترة التعلم بمعنى توفر الاستعداد والدافعية.

ويمكن تلخيص الأفكار الرئيسة للتعليم البرنامجي فيما يأتي:

- 1 - البدء من المعلومات التي لدى التلميذ أي من المعلومات التي يكون التلميذ متمكنًا منها من حيث التذكر أو الفهم أو التطبيق على الأقل.
- 2 - التدرج في تقديم المادة أو المعلومة الجديدة من خلال خطوات صغيرة مرتبة ترتيبًا منطقيًا وترتبط فيما بينها بعلاقة.

3 - التدرج في تقديم المادة أو المعلومة من السهل إلى الصعب وليس المقصود بالصعب أعلى درجات التعقيد والتي لا يمكن للتلميذ أن يستوعبها أو أن يحلها بل التي تتحدى تفكيره بدرجة بسيطة ويستطيع أن يحلها.

4 - العمل على تمكين التلميذ في أغلب الأحيان من إعطاء الاستجابة الصحيحة والعمل على تقليل الاستجابات الخاطئة.

5 - يتم التعزيز بعد الاستجابة الصحيحة لكي يستمر التلميذ في تقدمه بنجاح لتحقيق أهداف الدرس.

(3-8) المبادئ التي يبنى عليها التعليم المبرمج

1 - تقسيم العمل :

تقسيم كل عمل أو مهمة إلى الخطوات الصغيرة التي تتكون منها وبذلك يمكن تتبع هذه الخطوات الصغيرة والإجابة عن كل جزئية منها حتى يتحقق مستوى الأداء المطلوب.

2 - المشاركة الإيجابية للمتعلم :

بمعنى أن المشاركة الإيجابية من المتعلم تقود إلى اكتساب الخبرة المعلمة وبالتالي «فإن التفاعل الإيجابي بين التلميذ والموقف التعليمي الذي يحيط به إضافة إلى بعض طرق برمجة التعليم تؤكد على وجوب إنشاء المتعلم لاستجاباته بدلاً من اختيارها من بدائل متاحة»⁽¹³⁾، ويقصد بذلك الاستجابة المنشأة التي يعتمد فيها المتعلم على التصرف أي ينشئها المتعلم بنفسه معتمداً على الاستدعاء وليس على التصرف.

3 - التعزيز الإيجابي للاستجابة :

حيث أن حل المشكلة التي تتضمنها كل خطوة من خطوات البرنامج يتوقف على نتيجة الاستجابة للخطوة السابقة، فالمتعلم مثلاً الذي يؤدي امتحاناً ثم

يعترف نتيجة بعد وقت طويل قد يفقد حماسه واهتمامه بالموضوع، وقد يستمر في تعلمه على أساس معلومات خاطئة لم تصحح له. أما في التعليم البرنامجي فالتعزيز الإيجابي يلي كل استجابة صحيحة بمعنى أننا نقصد بالتعزيز هنا معرفة النتائج ونستخدم أحياناً المعززات الخارجية من قبيل المعلم مثل قطع الحلوى أوثناء على التميز.

4 - تفريد التعليم :

ويقصد بذلك المسير في التعلم حسب قدرة المتعلم الشخصية إذ يشعر التلاميذ بالملل لأن سرعة المسير في النظم أيضاً من قدراتهم أو يشعر البعض بالإحباط لأنهم يقصرون عن متابعة الباقيين من زملائهم لذلك في التعليم البرنامجي يتاح لكل معلم العمل وفقاً لسرعته ومعدله في الخطو.

5 - التكيف الذاتي للمتعلم

إن هدف البرنامج هو أن يتم التعلم واكتساب المعرفة أو المهارات المحددة والمعلومات لكل شخص على حدة حسب قدراته واستعداده على أن يقوم تلك الأسلوب من التعلم إلى تمكين المتعلم من تقييم مدى تعلمه بنفسه إضافة إلى التكيف الخاص من قبل المعلم.

6 - توفر الدافعية والاستعداد :

التعلم بطريقة التعليم البرنامجي يحتاج إلى توفر الدافعية وكذلك الاستعداد للتعلم بهذه الطريقة لدى الفرد فقد يكون البرنامج موجوداً في كتاب، فيقوم التلميذ بقراءة الإجابات الموضوعية دون أن يعتمد على نفسه في الإجابة عنها، لذلك لابد من توفر محركات السلوك والقبول بالالتزام تجاه هذا النوع من التعلم.

7 - تجريب المواد التعليمية من قبل المتعلمين :

يفضل أن يجرب المتعلمين المواد التعليمية في البرنامج لتحديد كيف يتعلمون هذه المواد وكيف يؤدون كل جزء من أجزائها حتى يتبين ما إذا كانت

هذه المواد تحقق التعلم على نحو فعال أم لا.

والجدير بالذكر أن البرامج دائماً توضع وتطور على أساس تجربتها والحصول على نتائج هذا التجريب من عينات ممثلة للمتعلمين.

كذلك فإن قيام المبرمج باختبار برنامجه قبل التطبيق يضمن انخفاض معدل الخطأ الذي قد يقع فيه المتعلم أثناء مروره في خطوات البرنامج.

8 - التحديد الدقيق للسلوك المبدئي للتلميذ أو المتعلم

يجب أن يحدد مبدئياً السلوك المتوقع للمتعلم من قبل المبرمج فذلك يساعد المبرمج على التأكد من احتمال استجابة المتعلم بطريقة صحيحة للإطارات الأولية من البرنامج.

9 - التحديد الدقيق لأنواع السلوك النهائي المرغوب فيه

ويتم ذلك عن طريق وصف كامل لأنواع المعرفة والمهارات والاتجاهات (جوانب معرفية، جوانب نفس حركية، جوانب انفعالية أو وجدانية) التي يتوقع من المتعلم أن يكتسبها أثناء أو بعد إنجاز البرنامج.

(4-8) مميزات وخصائص التعليم المبرمج

1 - الاهتمام الجيد في تحديد ووصف الأهداف التي يسعى البرنامج إلى تحقيقها وتحديد المعايير السلوكية لمستويات الأداء.

2 - زيادة فرص النجاح للموقف التعليمي عن طريق تقسيمه إلى عدة خطوات صغيرة (إطارات) وبالتالي تقليل فرص ظهور الاستجابة الخاطئة ومن ثم تجنب التلميذ الفشل.

3 - زيادة الإيجابية وتجنب السلبية للمتعلم عن طريق التقدم من الاستجابات الإيجابية إلى استجابات إيجابية أخرى وبالتالي اكتساب الخبرة وتحقيق التعلم.

- 4 - حصول المتعلم على نتيجة استجابته الفورية إلى تأكيد الاستجابة الصحيحة وتحقيق التعلم والشعور بالنشاط الذي يقود للتقدم.
- 5 - تعلم التلميذ وفق خطوات منطقية متتابعة تساعد على تكوين عادات التفكير السليم.
- 6 - إتاحة الفرصة لجميع التلاميذ لكي يسيروا في تعلمهم حسب ميولهم وقدراتهم واستعدادهم.
- 7 - أثناء انشغال التلميذ بالتعلم الذاتي المبرمج يتيح للمعلم فرصة القيام ببعض الأعمال التربوية.
- 8 - عندما يخطئ التلميذ في الإجابة يقوم البرنامج بتوجيه التلميذ إلى ما ينبغي عليه عمله قبل الانتقال إلى الإطار التالي أو الرجوع إلى الإطارات الفرعية ليعرف خطأه ثم يعود بعد ذلك إلى الإطار الأصلي ويصحح خطأه.
- 9 - إجابة التلميذ عن السؤال الموجود في الإطار تكون محدودة.
- 10 - يعتبر التعليم البرنامجي تعليمًا فرديًا أي تعلمًا ذاتيًا حيث يعمل كل تلميذ بمفرده وبالتالي يساعد على استمرارية التعليم خارج المدرسة ومن ثم يحقق أهداف تربوية.
- 11 - يتعلم كل تلميذ في التعليم البرنامجي حسب سرعته الخاصة لذلك يعتبر نوعًا من العلاج لمقابلة الفروق الفردية بين التلاميذ.
- 12 - يساهم التعليم البرنامجي في حل كثير من المشاكل التي تعوق العملية التعليمية مثل زيادة أعداد التلاميذ أو تغيبهم عن المدرسة أو قلة عدد المدرسين.
- 13 - يصلح التعليم البرنامجي لتدريب المعلمين وتأهيلهم تربويًا ومهنيًا.

14 - يُسهم التعليم البرنامجي في مساعدة كثير من المتعلمين غير النظاميين أو ممن يعملون خارج المدينة عن طريق المراسلة.

15 - يسهم التعليم البرنامجي في متابعة الجديد من تكنولوجيا التعليم.

(5-8) نواحي القصور في التعليم المبرمج

لقد أثبتت الكثير من الدراسات في مجال التعليم المبرمج وجود كثير من الملاحظات التي تعتبر مؤشراً لبعض نواحي القصور في التعليم المبرمج، من هذه الملاحظات ما يلي:

1 - يعتبر التعليم المبرمج أكثر ملائمة لتحقيق الأهداف في المجالين المعرفي والمهاري بالنسبة لعملية التعلم والتي ترتبط بتقديم المعلومات حيث اهتمام هذه الطريقة بمحتوى المنهج واعتمادها على المعارف والمعلومات وهي بالتالي لا تركز على الجانب الانفعالي أو الوجداني مثل الميول وكذلك الاتجاهات.

2 - هناك الكثير من البرامج والتي تحوي الكثير من الخطوات الصغيرة المتسلسلة والتي تجعل من البرنامج أطول من اللازم فتصيب الكثير من الدارسين بالملل حيث يشعرون بضيق الوقت في تقديم استجابات لمثيرات كثيرة وبسيطة وسهلة.

3 - كثيراً ما يحد هذا النظام من التعليم من قدرة التلميذ على الابتكار أو الإبداع بسبب تقييد التلميذ باستجابة معينة يحددها البرنامج.

4 - التعليم البرنامجي يقدم للتلاميذ المعلومات بطريقة مجزأة بحيث لا يستطيع التلميذ في الغالب أن يكون فهماً متكاملاً للمادة التعليمية.

5 - التعليم البرنامجي قد يتحول إلى عمل ميكانيكي آلي يهتم فيه المتعلم (التلميذ) للاستجابة بصورة آلية لكل إطار على حدة دون أن يحيط إحاطة كاملة بالبرنامج قبل الانتهاء منه.

تجعله من الممكن أن يقارن بين أدائه الحقيقي وبين الأداء المقنن للمهارة، وفي بعض الأحيان يشار إلى التغذية الراجعة على إنها معرفة النتائج.

ج- تنظيم التدريب: بمعنى التدرج في التدريب من البسيط إلى المعقد.

د - التنوع في التدريب : بمعنى إعطاء مزيد من التدريبات المتنوعة في الكم والكيف والتي تخدم الوصول إلى الكفاءة في المهارة.

تصنيف «كيف» للمهارة⁽¹⁾

- 1 - التقليد : ويشمل النشاطات التي لا تتطلب تناسقاً بين العضلات.
- 2 - التناول : ويشمل النشاطات التي تتعلق باتباع توجيهات أو العمل وفق تعليمات.
- 3 - التدقيق : وهي القدرة على زيادة سرعة العمل وإدخال تعديلات إيجابية.
- 4 - التسميق : التسميق بين سلسلة من الحركات بالتوصل إلى تتابع مناسب.
- 5 - للتطبيع : جعل العقل آلياً روتينياً لدرجة أن يصبح استجابة الآلية أوتوماتيكية فورية.

تصنيف مبسط للمهارة

ويتم بملاحظة أداء شخص ماهر وتقليد العناصر الأساسية للمهارة ومن ثم التمرين ويتضمن تكرار تتابع عناصر المهارة مع تقليل الجهد الواعي للأداء تدريجياً وبعد ذلك إتقان المهارة مع احتمال زيادة هذا الإتقان.

11 - أن يحسب ارتفاع مبنى أو برج باستخدام زاوية الارتفاع أو الانخفاض.

ثالثاً : التعميمات

1 - الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة البداية وإذا راعينا الاتجاه تسمى زاوية موجهة.

2 - دائرة الوحدة هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي وحدة الأطوال.

3 - القياس الدائري لزاوية مركزية = $\frac{\text{طول القوس المقابل لها}}{\text{طول نصف قطر الدائرة}}$

4 - للتحويل من التقدير الدائري إلى التقدير الستيني نضرب في $\frac{180}{\pi}$.

5 - للتحويل من التقدير الستيني إلى التقدير الدائري نضرب في $\frac{\pi}{180}$.

6 - الزاوية نصف القطرية هي زاوية مركزية تقابل قوساً طوله يساوي طول نصف قطر دائرتها وتساوي تقريباً $57^\circ 17'$

7 - مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2} r^2 \theta$ حيث θ مقاسة بالتقدير الدائري.

8 - يقال للزاوية الموجهة أنها في الوضع القياسي إذا كان رأسها نقطة الأصل وكان ضلعها الأول منطبقاً على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

9 - إذا كانت الزاوية الموجهة في وضع قياسي فإنه يقال إنها في الربع الذي يقع فيه ضلعها الثاني.

10 - إذا كانت (س، ص) هي النقطة المقابلة للعدد θ (الزاوية التي قياسها θ) على دائرة الوحدة فإن :

(أ) دالة الجيب (جا) تعطى بالعلاقة :

جا : $(0, 2\pi) \leftarrow \theta$ حيث جا $\theta = \text{ص}$

(ب) جتا : $(0, 2\pi) \leftarrow \theta$ حيث جتا $\theta = \text{س}$

15 - دالة ظل التمام (ظنتا) :

فلنتا : $[0, 2\pi) - \{0, \pi\} \leftarrow \text{ح}$

$$\text{ظنتا هـ} = \frac{1}{\text{ظنا هـ}} \text{ أو } \text{ظنتا هـ} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$$

16 - قانون الجيب : في أي مثلث أ ب جـ

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا أ}}$$

وهل تعلم أن قائد الطائرة يجب أن يكون قادراً على تحديد موضعه بالضبط فوق الأرض حيث يفترض أن الأرض كمستوى والمثلثات المستوية تعتبر أداة لتحديد موضعه وهذه كافية عندما يكون المطلوب مسافة صغيرة.

وهناك من يفترض أن النجوم تقع على سطح كروي هائل حيث تعتبر الأرض مركزها وهناك فإن الهندسة المستوية ليس لها مكان بل الهندسة المثلثية الكروية.

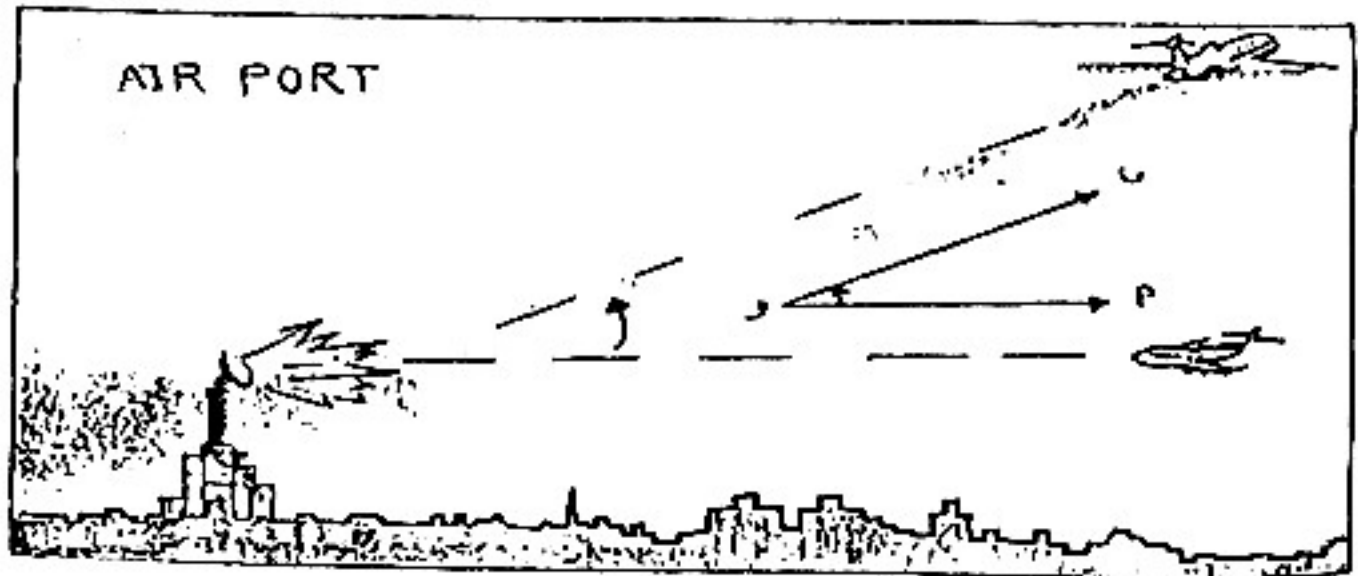
ولقد طور هذا العلم (حساب المثلثات) في الاتصالات باستخدام خواص المثلث القائم.

ولقد استخدم قدماء المصريين والإغريق حساب المثلثات في عمليات المسح والملاحة والتنجيم، وفي العصر الحديث يستخدم حساب المثلثات في دراسة حركة الموجات والتيار الكهربائي والتوتر والصوت وغيرها، من هنا كان لابد من أخذ فكرة جيدة عن حساب المثلثات بدءاً من الدوال الدائرية وانتهاءً بتحديد زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على هذا الموضوع في هذه المرحلة من الدراسة.

الوسائل التعليمية : مجموعة من الصور توضح فكرة الزاوية الموجهة.

مرحلة الكشف

تأمل الصورة التالية ثم أجب عن التساؤلات التي تليها :



نشاط (1-5)

س1 : ماذا توحى لك هذه الصورة ؟

س2 : ماذا يرسم شعاع الرادار عند متابعته لمسير طائرة لحظة دخولها المجال الجوي ؟

... ترسم زاوية ...

س3 : ما هي الزاوية ؟

... اتحاد شعاعين متحدين في الرأس ...

س4 : هل تذكر أنواع الزوايا التي درستها فيما سبق ؟

... الزاوية الحادة - القائمة - المنفرجة ...

س5 : ماذا تسمى الشعاعين و أ ، و ب بالنسبة للزاوية الموضحة في الرسم؟..

... ضلعي الزاوية ...

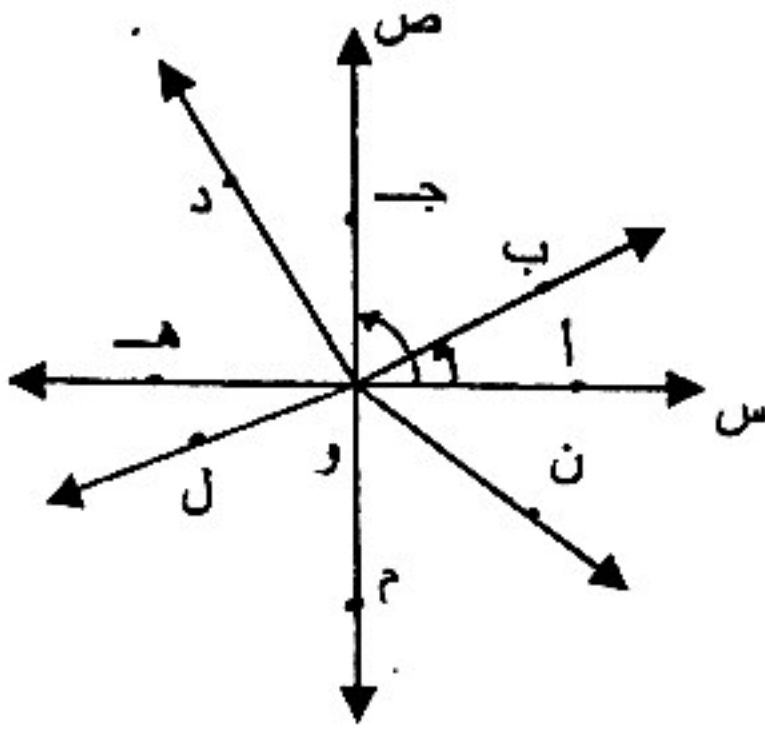
س6 : ما هو ناتج اتحاد الشعاعين و أ ، و ب ؟ ... زاوية ...

مرحلة تقديم المفهوم

الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نفس نقطة الابتداء (رأس الزاوية)
يسمى الشعاع الأول ضلع الابتداء، والشعاع الثاني ضلع الانتهاء
وتكون في الوضع القياسي إذا انطبق ضلع الابتداء على الاتجاه الموجب
للمحور السيني أو يوازيه.

نشاط (2-5)

في الشكل المجاور اكتب أسماء مجموعة من الزوايا في الوضع القياسي:



- 1 - $\angle$ اوب 5 -
- 2 - $\angle$ اوج 6 -
- 3 - $\angle$ اود 7 -
- 4 - $\angle$ اوه 8 -

نشاط (3-5)

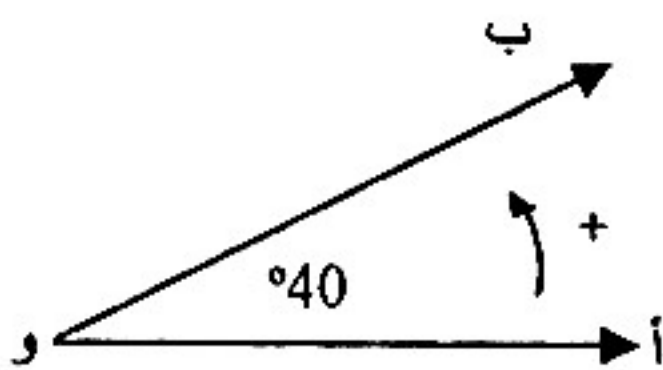
في الشكل المجاور أجب عن التساؤلات التالية :

س1 : هل تلاحظ اختلاف بين الزاويتين ؟ ...

(الاختلاف في الاتجاه للضلع الدائر)

س2 : هل الاختلاف في المقدار ؟

أم في الاتجاه ؟... (الاختلاف في الاتجاه)



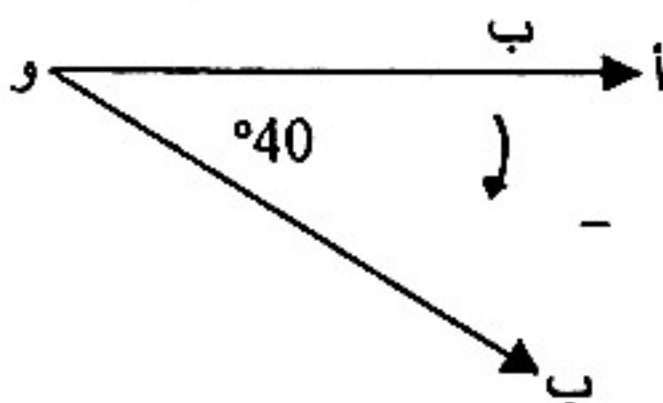
س3 : ما هو اتجاه دوران ضلع الانتهاء

هل هو مع اتجاه دوران عقارب

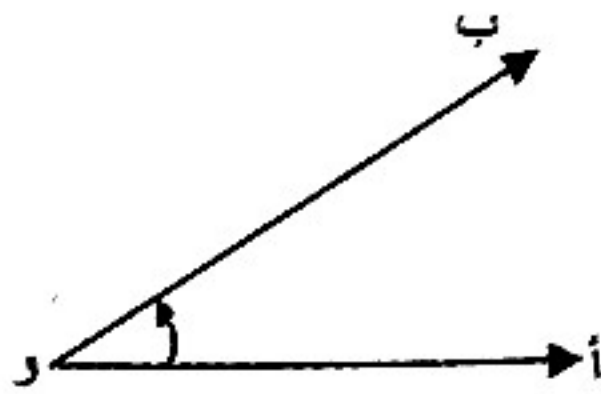
الساعة أم في اتجاه ضد دوران

عقارب الساعة ؟ ...

(ضد عقارب الساعة)

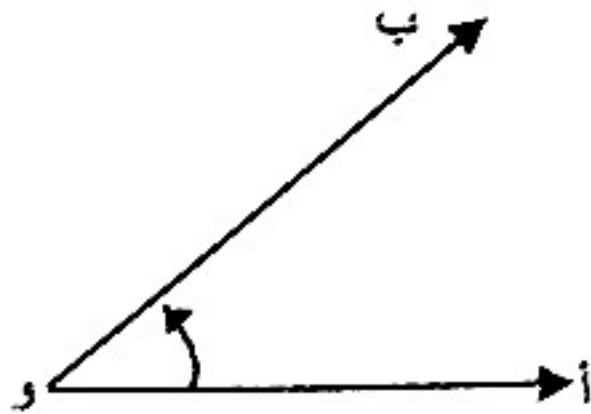


نشاط (4-5)



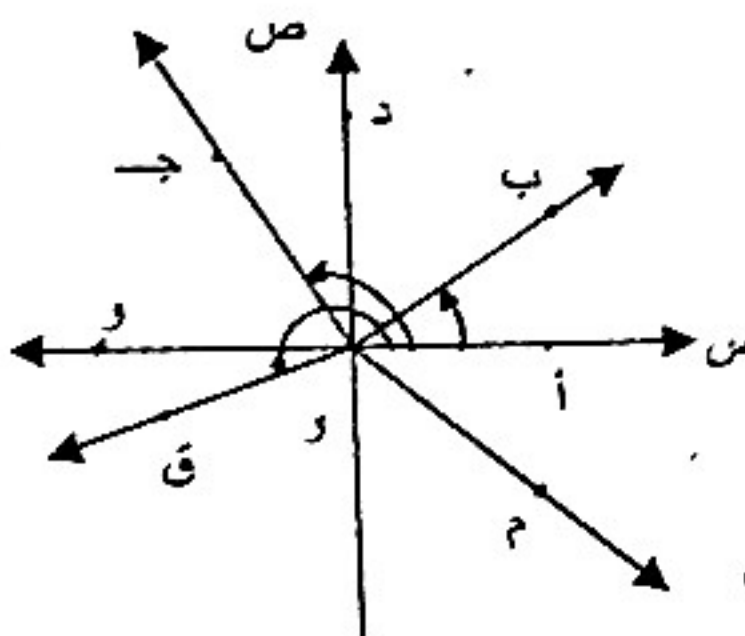
في الشكل المجاور هل هناك
اختلاف بين اتجاه دوران ضلع الانتهاء في
الزوايتين ؟ ...

لا يوجد اختلاف في اتجاه دوران ضلعي
الانتهاء



نشاط (5-5)

في الشكل المجاور تقاطع المحور السيني مع المحور الصادي يقسم
المستوى إلى أربع أرباع كما بالشكل.
والمطلوب منك :



- 1 - حدد زاوية في الربع الأول مع
تحديد اتجاه الدوران .. أ و ب
- 2 - حدد زاوية في الربع الثالث من
تحديد اتجاه الدوران أ و ق
- 3 - حدد زاوية في الربع الرابع
وأخرى في الربع الثاني مع
تحديد اتجاه الدوران ... أ و م
، أ و ج

مرحلة تقييم المفهوم

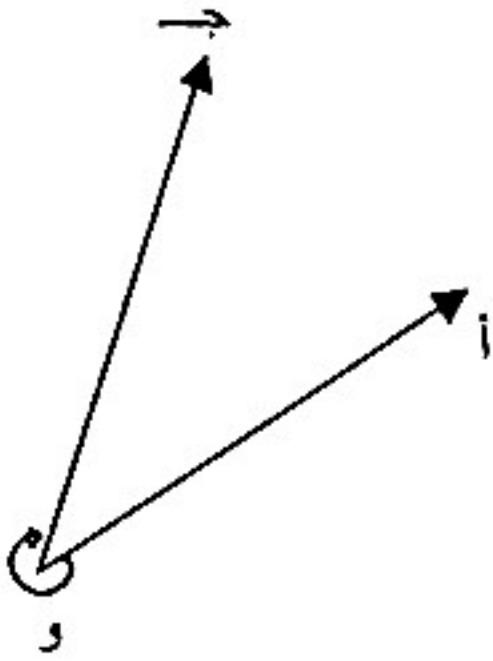
تكون الزاوية (و أ، و ب) زاوية موجبة إذا راعينا اتجاه دوران ضلع
الانتهاء وتكون موجبة إذا كان الدوران ضد اتجاه دوران عقربي الساعة.

تطبيق (1-5)

مرحلة التطبيق

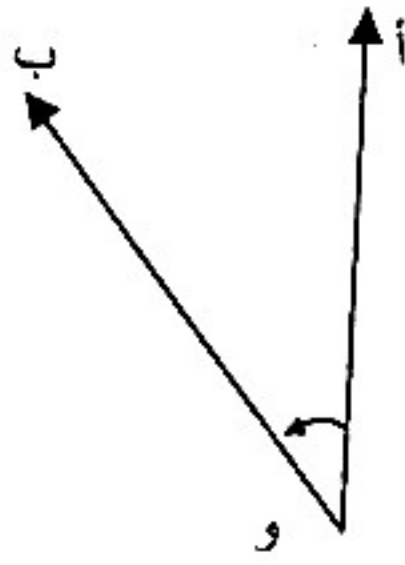
س1 : ارسم مجموعة الزوايا التالية والتي قياساتها 60° ، 38° ، 120° ، 240° موضحاً ضلع الابتداء وضلع الانتهاء واتجاه الدوران.

س2 : إذا كان $\vec{OA}$ هو ضلع الابتداء فحدد الزوايا الموجهة التالية من حيث القياس الموجب أو القياس السالب :



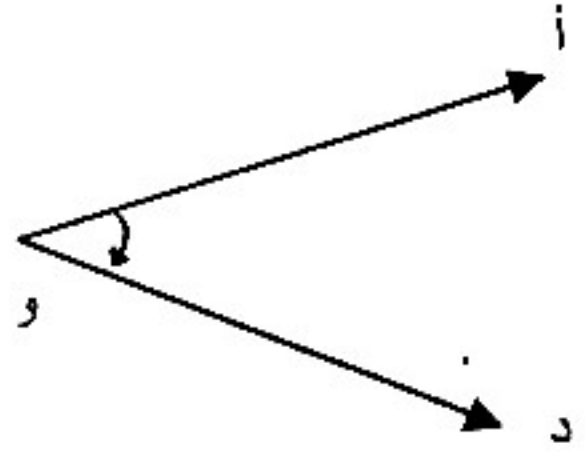
(3)

قياس سالب



(2)

قياس موجب



(1)

قياس سالب

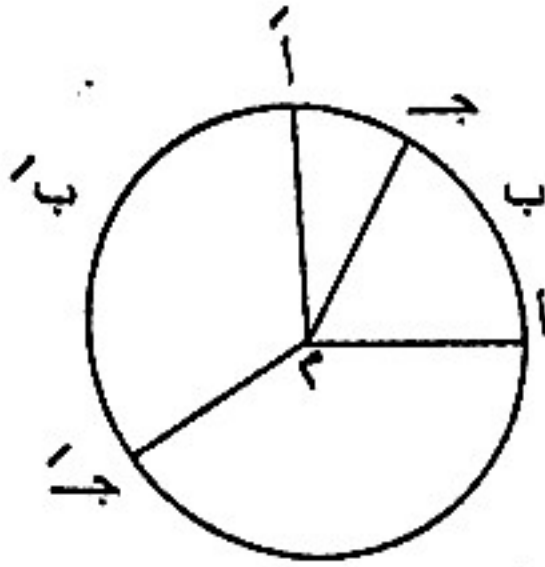
س3 : ارسم في المستوى الديكارتي مجموعة الزوايا التالية في الوضع القياسي 80° ، 120° ، 220° ، 330°

ملاحظات :

هذه الملاحظات تقدم للطلاب بهدف الاطمئنان إلى فهمهم لها.

سبق أن تعرف الطالب إلى مفهوم الدائرة ومركزها ونصف قطر الدائرة وكذلك الوتر، وإنه إذا فرضنا نقطتين على الدائرة فالمنحنى الواصل بينهما على محيط الدائرة يسمى قوس.

وفي الشكل المجاور :



- 1 - زاوية أ م ج - تقابل القوس أ ب ج
- 2 - تسمى زاوية أ م ج - زاوية مركزية لأن رأسها يقع على مركز الدائرة م أ ، م ج - نصفي قطرين في الدائرة.
- 3 - إذا قابلت زاويتان مركبتان في دائرة واحدة قوسين متساويين في الطول فإن هاتين الزاويتين تكونان متساويتين في القياس.

الفصل الثامن

التعليم البرنامجي

The Programming Learning

- (1-8) مقدمة
- (2-8) ما هو التعليم البرنامجي
- (3-8) المبادئ التي يبنى عليها التعليم المبرمج
- (4-8) مميزات وخصائص التعليم المبرمج
- (5-8) نواحي القصور في التعليم المبرمج
- (6-8) أنواع البرامج التعليمية
- (7-8) برنامج في الأسس
- (8-8) برنامج في اللوغاريتمات

الفصل الثامن التعليم البرنامجي

(1-8) مقدمة

التعلم عملية أساسية في الحياة، فالإنسان يتعلم كي يعيش، والمجتمع دائماً في تطور وتقدم مستمرين نتيجة لعمليات التعلم هذه.

والواقع أن كل مظاهر النشاط البشري هي نتاج عمليات التعلم، وعملية التعلم تختلف من فرد لآخر حسب مجموعة من العوامل مثل الممارسة والنضج والدافعية وغيرهم..

ونظراً لأهمية عمليتي التعليم والتعلم فقد دأب الكثير من علماء النفس والتربية على دراسة هذه الظاهرة ووضع النظريات الخاصة بالتعليم والتعلم.

ويعتبر التعليم البرنامجي من أساليب التعلم الجديدة والتي يمكن للفرد عن طريقها أن يتعلم ذاتياً أي معتمداً على قدراته الخاصة في التعلم.

ولقد شاع استخدام هذا النوع من التعليم في المدارس الأمريكية والاتحاد السوفيتي سابقاً وإنجلترا وفرنسا، وأخيراً بدأ الاهتمام في تعليم المواد الدراسية بطريقة التعليم البرنامجي في بعض الدول النامية.

ولعل أصول هذا التعليم يرجع إلى الطريقة الحوارية (طريقة المناقشة المقيدة) التي كان يتبعها سقراط وزملاءه عند تقديم المعرفة حيث التدرج مع التلاميذ من المعلوم إلى المجهول.

ولقد تقدمت هذه الأفكار على يد «برسي 1926, Pressey» عندما قدم أول آلة تعليمية الغرض منها تقديم مجموعة من الأسئلة وعلى المتعلم أن يستجيب على كل منها، وتقوم هذه الآلة بالتوضيح فيما إذا كانت الاستجابة صحيحة أم خاطئة وهذه الآلة تقوم على فكرة التعليم البرنامجي.

يعترف نتيجة بعد وقت طويل قد يفقد حماسه واهتمامه بالموضوع، وقد يستمر في تعلمه على أساس معلومات خاطئة لم تصحح له. أما في التعليم البرنامجي فالتعزيز الإيجابي يلي كل استجابة صحيحة بمعنى أننا نقصد بالتعزيز هنا معرفة النتائج ونستخدم أحياناً المعززات الخارجية من قبل المعلم مثل قطع الحلوى أوثناء على التلميذ.

4 - تعزيز التعليم :

ويقصد بذلك المثير في التعلم حسب قدرة المتعلم الشخصية إذ يشعر التلاميذ بالملل لأن مرعة المثير في التعلم أيضاً من قدراتهم أو يشعر البعض بالإحباط لأنهم يقصرون عن متابعة الباقيين من زملائهم لذلك في التعليم البرنامجي يتاح لكل معلم العمل وفقاً لمرعته ومعدله في الخطو.

5 - التقييم الذاتي للمتعلم

إن هدف البرنامج هو أن يتم التعلم واكتساب المعرفة أو المهارات المحددة والمعلومات لكل شخص على حدة حسب قدراته واستعداده على أن يقوم تلك المطلوب من التعلم إلى تمكين المتعلم من تقييم مدى تعلمه بنفسه إضافة إلى التقييم الخاص من قبل المعلم.

6 - توفر الدافعية والاستعداد :

التعلم بطريقة التعليم البرنامجي يحتاج إلى توفر الدافعية وكذلك الاستعداد للتعلم بهذه الطريقة لدى الفرد فقد يكون البرنامج موجوداً في كتاب، فيقوم التلميذ بقراءة الإجابات الموضوعية دون أن يعتمد على نفسه في الإجابة عنها، لذلك لابد من توفر محركات السلوك والقبول بالالتزام تجاه هذا النوع من التعلم.

7 - تجريب المواد التعليمية من قبل المتعلمين :

يفضل أن يجرب المتعلمين المواد التعليمية في البرنامج لتحديد كيف يتعلمون هذه المواد وكيف يؤدون كل جزء من أجزائها حتى يتبين ما إذا كانت

هذه المواد تحقق التعلم على نحو فعال أم لا.

والجدير بالذكر أن البرامج دائماً توضع وتطور على أساس تجربتها والحصول على نتائج هذا التجريب من عينات ممثلة للمتعلمين.

كذلك فإن قيام المبرمج باختبار برنامجه قبل التطبيق ضمن انخفاض معدل الخطأ الذي قد يقع فيه المتعلم أثناء مروره في خطوات البرنامج.

8 - التحديد الدقيق للسلوك المبدئي للتلميذ أو المتعلم

يجب أن يحدد مبدئياً السلوك المتوقع للمتعلم من قبل المبرمج فذلك يساعد المبرمج على التأكد من احتمال استجابة المتعلم بطريقة صحيحة للإطارات الأولية من البرنامج.

9 - التحديد الدقيق لأنواع السلوك النهائي المرغوب فيه

ويتم ذلك عن طريق وصف كامل لأنواع المعرفة والمهارات والاتجاهات (جوانب معرفية، جوانب نفس حركية، جوانب انفعالية أو وجدانية) التي يتوقع من المتعلم أن يكتسبها أثناء أو بعد إنجاز البرنامج.

(4-8) مميزات وخصائص التعليم المبرمج

1 - الاهتمام الجيد في تحديد ووصف الأهداف التي يسعى البرنامج إلى تحقيقها وتحديد المعايير السلوكية لمستويات الأداء.

2 - زيادة فرص النجاح للموقف التعليمي عن طريق تقسيمه إلى عدة خطوات صغيرة (إطارات) وبالتالي تقليل فرص ظهور الاستجابة الخاطئة ومن ثم تجنب التلميذ الفشل.

3 - زيادة الإيجابية وتجنب السلبية للمتعلم عن طريق التقدم من الاستجابات الإيجابية إلى استجابات إيجابية أخرى وبالتالي اكتساب الخبرة وتحقيق التعلم.

- 4 - حصول المتعلم على نتيجة استجابته الفورية إلى تأكيد الاستجابة الصحيحة وتحقيق التعلم والشعور بالنشاط الذي يقود للتقدم.
- 5 - تعلم التلميذ وفق خطوات منطقية متتابعة تساعد على تكوين عادات التفكير السليم.
- 6 - إتاحة الفرصة لجميع التلاميذ لكي يسيروا في تعلمهم حسب ميولهم وقدراتهم واستعدادهم.
- 7 - أثناء انشغال التلميذ بالتعلم الذاتي المبرمج يتيح للمعلم فرصة القيام ببعض الأعمال التربوية.
- 8 - عندما يخطئ التلميذ في الإجابة يقوم البرنامج بتوجيه التلميذ إلى ما ينبغي عليه عمله قبل الانتقال إلى الإطار التالي أو الرجوع إلى الإطارات الفرعية ليعرف خطأه ثم يعود بعد ذلك إلى الإطار الأصلي ويصحح خطأه.
- 9 - إجابة التلميذ عن السؤال الموجود في الإطار تكون محدودة.
- 10 - يعتبر التعليم البرنامجي تعليمًا فرديًا أي تعلمًا ذاتيًا حيث يعمل كل تلميذ بمفرده وبالتالي يساعد على استمرارية التعليم خارج المدرسة ومن ثم يحقق أهداف تربوية.
- 11 - يتعلم كل تلميذ في التعليم البرنامجي حسب سرعته الخاصة لذلك يعتبر نوعًا من العلاج لمقابلة الفروق الفردية بين التلاميذ.
- 12 - يسهم التعليم البرنامجي في حل كثير من المشاكل التي تعوق العملية التعليمية مثل زيادة أعداد التلاميذ أو تغيبهم عن المدرسة أو قلة عدد المدرسين.
- 13 - يصلح التعليم البرنامجي لتدريب المعلمين وتأهيلهم تربويًا ومهنيًا.

14 - يُسهم التعليم البرنامجي في مساعدة كثير من المتعلمين غير النظاميين أو ممن يعملون خارج المدينة عن طريق المراسلة.

15 - يسهم التعليم البرنامجي في متابعة الجديد من تكنولوجيا التعليم.

(5-8) نواحي القصور في التعليم المبرمج

لقد أثبتت الكثير من الدراسات في مجال التعليم المبرمج وجود كثير من الملاحظات التي تعتبر مؤشراً لبعض نواحي القصور في التعليم المبرمج، من هذه الملاحظات ما يلي:

1 - يعتبر التعليم المبرمج أكثر ملاءمة لتحقيق الأهداف في المجالين المعرفي والمهاري بالنسبة لعملية التعلم والتي ترتبط بتقديم المعلومات حيث اهتمام هذه الطريقة بمحتوى المنهج واعتمادها على المعارف والمعلومات وهي بالتالي لا تركز على الجانب الانفعالي أو الوجداني مثل الميول وكذلك الاتجاهات.

2 - هناك الكثير من البرامج والتي تحوي الكثير من الخطوات الصغيرة المتسلسلة والتي تجعل من البرنامج أطول من اللازم فتصيب الكثير من الدارسين بالملل حيث يشعرون بضيق الوقت في تقديم استجابات لمثيرات كثيرة وبسيطة وسهلة.

3 - كثيراً ما يحد هذا النظام من التعليم من قدرة التلميذ على الابتكار أو الإبداع بسبب تقيد التلميذ باستجابة معينة يحددها البرنامج.

4 - التعليم البرنامجي يقدم للتلاميذ المعلومات بطريقة مجزأة بحيث لا يستطيع التلميذ في الغالب أن يكون فيهما متكاملًا للمادة التعليمية.

5 - التعليم البرنامجي قد يتحول إلى عمل ميكانيكي آلي يهتم فيه المتعلم (التلميذ) للاستجابة بصورة آلية لكل إطار على حدة دون أن يحيط إحاطة كاملة بالبرنامج قبل الانتهاء منه.

6 - أن إعداد البرامج الجيدة يتطلب كثيرًا من الجهد والاختبار عدة مرات وبالتالي يصعب إنتاج مثل هذه البرامج بصورة فردية ويتولى إعدادها بعض المؤسسات التعليمية التي تتوفر لها الخبرة والإمكانات اللازمة.

(6-8) أنواع البرامج التعليمية

يمكن تقسيم البرامج التعليمية إلى نوعين :

النوع الأول

ويطلق عليه اسم البرامج الخطية Linear Programs حيث يتم تتابع الأطر أو الخطوات في اتجاه خطي.

يتم تقسيم محتوى المادة المراد تعليمها إلى وحدات صغيرة تسمى خطوات أو أطر حيث يبدأ المتعلم بالخطوة الأولى وعندما يتعلمها بنجاح ينتقل إلى الخطوة الثانية وهكذا.

والواقع أنه في هذا النوع نجد أن جميع التلاميذ يمرون بجميع الخطوات ولكنهم يختلفون في سرعة التتابع أو سرعة إتمام المهام التعليمية وهذا النوع نرمز له بالشكل : (1) ← (2) ← (3) ← ...

النوع الثاني

ويطلق عليه اسم البرنامج المتشعب Branching Program وأحياناً يسمى برنامج «كراودر» Crowder نسبة إلى مصممه، ويختلف عن النوع الخطي في عملية التتابع المتشعبة حيث يتم وضع مجموعة اختيارات مختلفة للإجابة، وعندما يختار المستجيب إجابة منها فإذا كانت صائبة استمر إلى السؤال الذي يليه وهكذا، أما إذا كانت استجابته خاطئة فإنه يوجه إلى جزء آخر من الكتاب يوضح له أن إجابته خاطئة ويقدم له مجموعة من الأسئلة والعبارات والتي تمكنه من العودة إلى النقطة التي عاد منها بعد أن يكون قد أتقنها.

فمثلاً إذا كان التلميذ عند السؤال العاشر في الصفحة الخامسة وأخطأ في الإجابة عن هذا السؤال يجد أمامه «الإجابة خاطئة» عد إلى الصفحة الثالثة ووجد في الصفحة الثالثة مجموعة من الإرشادات والأسئلة المتتابعة والتي إذا ما أتقن المتعلم إجابتها أوصلته إلى السؤال العاشر مرة أخرى فإذا أجاب عنه إجابة صائبة تقدم إلى السؤال الذي يليه وإذا أخطأ مرة أخرى يعود إلى الصفحة الثالثة مرة ثانية وهكذا.

$$(1) \leftarrow (2) \leftarrow (3) \leftarrow (4) \leftarrow \dots \leftarrow (10)$$

↓ ↓ ↓

إعداد البرنامج

يمر إعداد البرنامج التعليمي بمراحل ثلاث :

أولاً : مرحلة التخطيط

تمثل مرحلة التخطيط دائماً حجر الأساس لأي مشروع، ويتم في هذه

المرحلة :

- 1 - تحديد الوحدة الدراسية (المحتوى) المراد عمل برنامج لها.
- 2 - تقسيم الوحدة الدراسية إلى مجموعة أجزاء صغيرة.
- 3 - تحديد الأهداف السلوكية (تحديد السلوك المتوقع أن يقوم به التلميذ بعد أن ينهي البرنامج).
- 4 - تحديد نقطة البداية عند التلاميذ عن طريق إعطائهم اختبار تحصيلي مناسب لتحديد مستواهم العلمي من جهة وتحديد الأجزاء التي يتقنها لكي يبدأ البرنامج من بعدها.
- 5 - تحديد قدرات وإمكانات التلاميذ مثل مستوى الذكاء والقدرات اللفظية والقراءة القرائية..

ثانياً : كتابة البرنامج

في هذه المرحلة يتم :

- 1 - وضع مادة البرنامج في صورة أطر (كل خطوة من خطوات البرنامج تسمى إطاراً) والإطار يمثل جزءاً بسيطاً من المادة كمعلومة يوضع عليها سؤال أو أكثر والاستجابة التي يقوم بها التلميذ بعد قراءتها تمثل الاستجابة التي يجب تعلمها إن كانت استجابته صحيحة ومطابقة للإجابة الموضوعية.
- 2 - يسجل التلميذ استجابته في ورقة خارجية إذا كان البرنامج يسجل في كتاب أو في أوراق البرنامج وهذه الخطوة تجعل التلميذ نشيطاً فاعلاً.
- 3 - تحدد الإجابة عن كل إطار (خطوة) أمام السؤال الذي يليه حتى يتمكن التلميذ من مقارنة إجابته بالإجابة الصحيحة، وبالتالي يحقق تغذية مرجعية للتلميذ وتعمل هذه التغذية على زيادة الدافعية للتعلم والاستمرار في البرنامج.
- 4 - يضع أحياناً كاتب البرنامج إشارات أو تلميحات لتوحيد استجابات التلاميذ والأمثلة التالية توضح ذلك:

- أ - إذا كان العدد أقل من الصفر يسمى عدداً
سالباً
- ب - إذا كان العدد أقل من الصفر يسمى عدداً
سالباً
- ج - إذا كان العدد أقل من الصفر يسمى عدداً سـ
سالباً

نلاحظ في الإطار (أ) لا يوجد أي نوع من التلميحات بينما في الإطار التالي (ب) وضعت مجموعة من النقاط للدلالة على عدد حروف الإجابة وفي الإطار (ج) وضع الحرف «سـ» وهو الحرف الأول من الاستجابة.

وعموماً فإن هذه التلميحات ليس الهدف منها إعطاء الإجابة ولكن توجيه

التلميذ للإجابة الصحيحة ومنعه من الوقوع في الخطأ.
وهناك من التلميحات الكاملة كأن تكتب الاستجابة أولاً في صورة معلومة ثم يكتب السؤال أسفلها كما في المثال التالي:
«إذا كان المميز للمعادلة موجباً فإن للمعادلة التربيعية جذران حقيقيان مختلفان».

س : يكون للمعادلة التربيعية جذران حقيقيان مختلفان إذا كان ...
- مميز المعادلة موجباً -

د - يرتب البرنامج من حيث الإطار بحيث تتدرج الأطر من السهل إلى الصعب ومن المعلوم إلى المجهول ومن المحسوس إلى المجرد وكذلك يراعى الترتيب في الأطر بحيث تسهل عملية المراجعة للبرنامج.

ثالثاً : تجربة البرنامج (التقويم)

في هذه المرحلة يتم تجربة ومراجعة البرنامج بغرض التقويم أي التعرف على مدى صلاحية البرنامج للتطبيق ومدى تحقيق الأهداف، ومن ثم عمليات التصحيح والتعديل من حذف أو إضافة وتتم بـ :

1 - إعداد النسخة الأولى للبرنامج ويتم بإعداد أو كتابة مجموعة الأطر على بطاقات منفردة وتوضع الإجابة خلف البطاقة وتكون الكتابة بلغة سهلة وواضحة مع دقة المادة العلمية.

2 - تجرب هذه الأطر على مجموعة من التلاميذ في حدود عشرة تلاميذ (من سيطبق عليهم البرنامج من حيث المستوى التحصيلي) ويقوم التلاميذ بقراءة البطاقة والاستجابة عليها والنظر إلى الخلف لمعرفة صحة أو خطأ استجابته وكذلك بغرض التعزيز.

3 - تراجع الإطارات عدة مرات في ضوء الأهداف المرجوة، وتكون المراجعة شاملة من حيث عدم الغموض وحذف المعلومات التي ليس لها علاقة بمادة الإطار وإضافة الأمثلة واللا أمثلة في حالة تعلم المفاهيم وكذلك مدى التلميحات المطلوبة في كل إطار.

4 - التجربة النهائية للبرنامج وتكون بعد إتمام التصحيحات التي تمت على النسخة الأولى ويتم تجريبه على مجموعة أكبر من التلاميذ في حدود الثلاثين أو أكثر ويطلب منهم أيضاً وضع علامة أمام رقم الإطار الذي يمثل صعوبة بالنسبة لهم مع وصف نوع هذه الصعوبة، ثم يقدم لهم اختباراً لقياس مدى ما تعلموه ومن ثم تحليل نتائج إجاباتهم لمعرفة الأخطاء الشائعة ومعرفة الزمن الذي يستغرقه كل تلميذ في الإجابة ومتوسط درجاتهم وكذلك قدرة الاختبار التمييزية.

5 - يعد إجراء التجربة النهائية وعمل الإجراءات الإحصائية اللازمة يمكن إجراء بعض التعديلات الضرورية ومن ثم يكون البرنامج صالحاً للتطبيق ويكون في صورته النهائية.

6 - يطبع البرنامج في كتاب خاص أو يعد لاستخدامه في الآلات التعليمية وهذه الآلة في أبسط صورها عبارة عن صندوق يحتوي على البرنامج والذي يكون مطبوعاً على نوع معين من الورق وتحتوي الآلة على فتحة يسمح للتلميذ برؤية جزء من البرنامج وهو الإطار كما توجد فتحة أخرى بها شريط من الورق يسمح للتلميذ بتسجيل إجابته عليه وبعد أن يقرأ التلميذ الإطار الذي أمامه ويسجل إجابته تعين له الآلة مباشرة ما إذا كانت إجابته صحيحة أم خاطئة⁽⁵⁾.

وبعد فقد يعتبر البعض أن التعليم البرنامجي يستطيع أن يحل جميع مشاكل التعليم في مدارسنا، وقد يعتقد البعض أن التعليم البرنامجي ما هو إلا وسيلة تعليمية أو اختباراً من الاختبارات، من هنا يجب أن نميز بين الوسيلة والاختبار والتعليم البرنامجي، فالوسيلة التعليمية سواء كانت سمعية أو بصرية أو

كليهما عبارة عن مثير (S) Stimula أو قد تكون استجابة (R) Response ولكن
التعليم البرنامجي عبارة عن نموذج يحتوي على كل من المثير والاستجابة
والمعزز فهو أسلوب للتعليم.

والاختبار موقف تعليمي تقويمي يمثل مشكلة تواجه التلميذ ويتطلب منه
إيجاد حل لهذه المشكلة.

نموذج لاستخدام التعليم البرنامجي في التدريس

عزيزي الطالب

هذا البرنامج الذي بين يديك ليس اختباراً ولكنه طريقة وأسلوب في التعليم حيث نقدم لك مجموعة خطوات كل خطوة تسمى إطاراً والمطلوب منك أن تقرأ العبارة الموجودة في الإطار ثم تكتب الإجابة في المسافة الخالية أمام الإطار، وبعد انتهائك من كتابة الإجابة انظر إلى الإجابة الموضوعية في الإطار الذي يليه لتتأكد من صحة إجابتك، فإذا كانت إجابتك صائبة فانتقل مباشرة إلى الإطار التالي، أما إذا كانت إجابتك خاطئة تعرف على الخطأ قبل الاستمرار في البرنامج.

ملاحظة :

لا تحاول معرفة الإجابة الصحيحة قبل قراءة الإطار جيداً وكتابة الإجابة في المكان المخصص لذلك.

وفقكم الله ..

(7-8) برنامج في الأسس

تعلم عزيزي الطالب أن :

$$س \times س = س^2, س \times س \times س = س^3$$

$$س \times س \times س \times س = س^4$$

$$\therefore س^4 = 2س \times 2س$$

أو $س \times س \times س \times س = س^4 = س^3 \times س$ وعلى ذلك :

قاعدة (1)

$$س^م \times س^ن = س^{م+ن} \dots\dots$$

$$س^3 \times س^4 = س^7$$

$$س^{-9} \times س^5 = س^{-4}$$

، م ، ن أعداد حقيقية

أكمل ما يأتي :

	$س^2 \times س^4 = \dots\dots$
$س^6$	$س^3 \times س^{-2} = \dots\dots$
$س$	$س^{\frac{1}{2}} \times س^3 = \dots\dots$
$س^{\frac{7}{2}}$	$3س^6 \times 2س^4 = \dots\dots$
$6س^{10}$	

قاعدة (2)

$$س^م \div س^ن = س^{م-ن}$$

قاعدة (3)

$$س^{-ن} = \frac{1}{س^ن}$$

مثال (1)

$$س^2 = س^{2-4} = \frac{س^4}{س^2}$$

مثال (2)

$$2 = \frac{8}{5} = \frac{2^{5-6}}{5}$$

مثال (3)

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

مثال (4)

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

أكمل ما يأتي :

	$\dots = \frac{1}{5}$
س 5-	$\dots = \frac{13}{7}$
13 س 7	$\dots = \frac{6}{3}$
6 ص 3-	$\dots 4 = \frac{8}{2}$
ب 2-	

قاعدة (3) س $1 = 0$ ، ب $1 = 0$ ، ج $1 = 0$

$$1 = 0 \text{ (أ ب ج)}$$

أوجد ناتج :

	$24 \text{ س } 3 \times \frac{1}{6} \text{ س } 1 \text{ ص } 3 = \dots$
4 س 2 ص 5	$2 \text{ س } 5 \text{ ص } 3 \times 3 \text{ س } 6 \text{ ص } = \dots$
6 س 4 ص	$\dots = \frac{2}{3} \text{ س } 7$

2 س ¹⁰	4 ا جـ ⁵⁻ × 3 ا ¹⁻ جـ ⁵ = ...
12	5 ب ⁶⁻ × 6 ب ⁶ =
30	3 س ³ ص ² × 4 س ¹ × 6 س ²⁻ ص
18 س ⁴ - 3 ص ⁵	3 ب ⁴⁻ جـ × 4 جـ ¹⁻
12 ب ⁴⁻	

قاعدة (4)

$$(a)^n = a^{n \cdot m}$$

مثال (1)

$$(a^3)^2 = a^6, (b^4)^2 = b^8$$

قاعدة (5)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

مثال (1)

$$(س^2 ص^3)^4 = س^8 ص^{12}$$

أوجد ناتج :

	$\frac{س^6}{...} = ... \times س^6 = س^3 (س^2 ص^1)^3$
ص ³ ، ص ³⁻	$3 س^2 ص^3 \times (س^3 ص^2)^2 = 3 س^2 ص^3 \times 3 س^4 ص^4 = ...$
س ⁶⁻ . ص ⁴	$3 س^2 ص^3 \times س^3 ص^6 = 3 س^5 ص^9$
ص	$... = \left(\frac{1}{2} ب جـ^2 \right)^4$
$\frac{1}{16} ب^4 جـ^8$	

(8-8) برنامج في اللوغاريتمات

عرفت عزيزي الطالب أن :

$2^3 = 8$ وهذه يمكن وضعها في صورة أخرى تسمى الصورة اللوغاريتمية بالشكل : $\log_2 8 = 3$

ونقرأ لوغاريتم العدد 8 للأساس 2 يساوي 3.

أو نكتب $3 = \log_2 8$.

كذلك : $5^2 = 25$ (صورة أسية)

يمكن وضعها بصورة لوغاريتمية كالتالي :

$\log_5 25 = 2$ أو $2 = \log_5 25$

ونقرأ لوغاريتم العدد 25 للأساس خمسة يساوي 2.

كذلك : $\log_3 81 = 4$ نقرأ لوغاريتم العدد 81 للأساس 3 يساوي 4.

وإذا أردنا إرجاعها إلى الصورة الأسية تصبح :

$$3^4 = 81$$

في الصورة $\log_b a = c$ —

يسمى ب أساس اللوغاريتم، ب < 1.

تطبيق :

أ - ضع الصور التالية في الصورة اللوغاريتمية :

	$\leftarrow 128 = 2^7$
$128 = 2^7$	$\leftarrow 3 = 3^1$
$ع = 3 = 3^1$	$\leftarrow 4 = 2^2(3 - 1)$
$2 = 3 = 3^1$	

ب - ضع الصور التالية في الصورة الأسية :

	$\leftarrow 96 = 2^5 \times 3$
$96 = 2^5$	$\leftarrow 2 = 2^1(1 - 1)$
$2 = 2^1(1 - 1)$	$\leftarrow 9 = 3^2$
$ص = 9 = 3^2$	

ج - أكمل ما يأتي :

	إذا كان $2 = 2^1$ فإن $... = ...$
9	إذا كان $1 = 1^1(5 - 1)$ فإن $... = ...$
7	إذا كان $100 = 10^2$ فإن $... = ...$
2	

قاعدة (1)

$$\text{لوب س.ص} = \text{لوب س} + \text{لوب ص}$$

مثال (1) $5 \times 6 = 30$ لوب $5 + 6 = 11$ لوب

مثال (2) $7 \times 7 = 49$ لوب $7 + 7 = 14$ لوب

مثال (3) $\text{لوب س.ص} = \text{لوب س} + \text{لوب ص}$

$$\text{لوب س.ص.ع} = \text{لوب س} + \text{لوب ص} + \text{لوب ع}$$

مثال (4)

أكمل ما يأتي :

	$\dots + 7_{10} = 9 \times 7_{10}$
9_{10}	$\text{لوم ب} \times \text{ج} \times \text{د} = \text{لوم ب} + \dots + \dots$
$\text{لوم ج} + \text{لوم د}$	$\dots = \text{لوم} (3-س) (3+س)$
$\text{لوم} (3-س) + \text{لوم} (3+س)$	$\text{لوم} 9 \times 5 = \dots + 9_2$ $\dots + 3 \times 3_2 =$ $\dots + \dots + 3_2 =$
$5_2 + 3_2$	

قاعدة (2)

$$\text{لوم} \frac{س}{ص} = \text{لوم} س - \text{لوم} ص$$

مثال (1) $\text{لوم} 2 \frac{7}{5} = \text{لوم} 7 - \text{لوم} 5$

مثال (2) $\text{لوم} \frac{ج}{ر} = \text{لوم} ج - \text{لوم} ر$

أكمل ما يأتي :

	$\dots + 3_2 = \text{لوم} 2 \frac{3}{17}$
$17_2 -$	$\dots - 9_2 = \text{لوم} 2 \frac{9}{5}$ $\dots - 3 \times 3_2 =$ $\dots - \dots + \dots =$
$5_2 - 3_2 + 3_2$	$8_5 - \dots = \text{لوم} 5 \frac{3}{8}$ $(2 \times 2 \times 2_5) - \dots =$ $\dots - \dots - \dots - \dots =$
$3_2 - 2_2 - 2_2 - 2_2$	

قاعدة (3)

$$\text{لوب س}^{\text{م}} = \text{م لوب س}$$

مثال (1) $\text{لوب س}^3 = 3 \text{ لوب س}$

مثال (2) $\text{لوب س}^8 = \text{لوب س}^3 \text{ لوب س}^3 = 3 \text{ لوب س}^2$

قاعدة (4)

$$\text{لوب ب} = 1, \text{ ب} \neq 1$$

$$\text{لوب} 1 = 0$$

مثال (1) $\text{لوب} 5 = 1, \text{ لوب} 7 = 1, \text{ لوب} 1 = 0$

أكمل ما يأتي:

	$\text{لوب س}^{\text{م}} = \text{م} \dots$
لوب س^3	$\text{لوب} 2^9 = 9 \dots = \dots$
$\text{لوب} 2^4, 9 \text{ لوب} 2^4$	$\text{لوب} 2^6 = 3 \dots$ $3 \times 2 \text{ لوب} 2 = 3$ $3 (\text{لوب} 2 + \dots) =$ $3 (\dots + \dots) =$ $\dots + \dots =$
$3 + 3 \text{ لوب} 2^3$	

تطبيق: إذا كان $لو_2 3 = 0.2$ ، $لو_2 5 = 0.4$ ، $لو_2 4 = 0.3$ ، $لو_2 7 = 0.6$ فإن :

	$لو_2 15 = 3 \times 5$ $... + ... =$ $... =$
0.6	$لو_2 \frac{7}{5} = ... - ...$ $=$
0.2	$لو_2 8 = 3 \times 2$ $... = ... \times 3 =$
3	$لو_2 20 = 5 \times 4$ $... + 4 =$ $... + 2 =$ $... + ... =$
2.4	

قاعدة :

في حالة اللوغاريتمات التي أساسها العدد 10 مثل : $لو_{10} 7$ ، $لو_{10} 10$ س ، $لو_{10} 10$ ص ، $لو_{10} (س + 3)$ يمكن كتابة اللوغاريتم دون كتابة الأساس وعلى الصورة $لو_7$ ، $لو_س$ ، $لو_س$ ، $لو (س+3)$ وهكذا أي لوغاريتم لا يوجد له أساس مكتوب أسفله يعتبر الأساس 10.

تطبیق :

	لو 10 = لو 10 ... =
1	لو 100 = لو 10 ² .. =
2	لو 1000 = ... = ..
3	لو 10 ⁶ = .. = ...
6	لو $\frac{1}{10}$ = ... = ...
1-	

الفصل التاسع

الألعاب في تدريس الرياضيات

Games in Teaching Mathematics

- (1-9) مقدمة
- (2-9) الألعاب في الرياضيات
- (3-9) معايير استخدام استراتيجيات الألعاب
- (4-9) نماذج لألعاب تدريسية
- (5-9) المربعات السحرية

الفصل التاسع

الألعاب في تدريس الرياضيات

(1-9) مقدمة

يتميز العصر الذي نعيش فيه بالتكنولوجيا والتقدم العلمي الهائل على أن أهم سمة لهذا العصر هي دور الرياضيات والتكنولوجيا في الاكتشافات العلمية قديمها وحديثها، من هنا تهتم الدول بإعداد أجيالها من أبنائها إعدادًا جيدًا في مجال الرياضيات ودراساتها إلى الدرجة التي أصبح عندها تقدم الأمم ورقبها يقاس بعدد ما لديها من علماء في الرياضيات، وهذه الخطوة من الإعداد لتعلم الرياضيات تحتاج إلى عمليات تقويم شاملة ومستمرة لكل متغيرات العملية التعليمية وقد يتطلب الأمر تحديث وتجديد للمناهج الخاصة بالرياضيات من حيث المحتوى وطرق التدريس والأهداف بما يتماشى مع قدرات المتعلمين واستعدادهم الدراسي وبما يتطلبه العصر من وجود كوادر من المتعلمين يتميزون بقدرات عقلية متميزة مثل القدرة على التفكير الاستنتاجي أو التفكير الناقد وكذلك الابتكارية والإبداع والذين يستطيعون أيضًا أن يفهموا ويمارسوا لعبة الرياضيات بإتقان ومهارة.

فالرياضيات بمفهومها الفلسفي لعبة يضع فيها اللاعبون قواعدهم وقد لا يلعبون لأي غرض غير اللعب طبقًا للقواعد. وقد يغير أي لاعب في أي وقت أية قاعدة بشرط ألا يؤدي ذلك التغيير إلى قواعد متناقضة طالما كان في وسع شخص واحد أن يلعب في الرياضيات وذلك لأن اللاعب لا يحتاج إلى موافقة شريك أو أكثر لتغيير قاعدة ما⁽¹⁰⁾.

ولما كان تدريس الرياضيات يهدف إلى تنمية التفكير الرياضي لدى المتعلمين من حيث القدرة على الربط بين المعطيات واستنتاج العلاقات وتحويل المشكلات اللفظية إلى لغة رمزية أو العكس وكذلك التعامل مع التعميمات

واكتشافها وبرهنة صحتها، هذه القدرات الخاصة بالتفكير وبالتعامل مع الرياضيات من حيث الفهم والتطبيق والتحليل وغيرها من القدرات المتعلقة بدراسة الرياضيات يمكن تسميتها عن طريق استخدام استراتيجيات تدريسية كثيرة من بينها استراتيجية الألعاب الرياضية وهذه الاستراتيجية عبارة عن ألعاب تعتمد في فكرتها على الرياضيات عند تدريس موضوعات في الرياضيات وتهدف أول ما تهدف إلى تنمية التفكير الاستقرائي الاكتشافي والتفكير الاستنباطي الاكتشافي وكذلك التفكير التحليلي في الرياضيات.

هذه الألعاب يمكن عن طريق ممارستها أن تحقق أهداف الجانب المعرفي والجانب الوجداني وكذلك الجانب المهاري من تدريس الرياضيات.

(2-9) الألعاب في الرياضيات

يقصد بذلك تلك الألعاب الجماعية أو الفردية التي تعتمد على استخدام لغة الرياضيات من رموز وأشكال وأرقام وألفاظ رياضية ويكون مخطط لها من قبل المعلم بغرض تحقيق هدف معين.

ولما كانت كفاءة المعلم تقاس بمدى قدرته على تحقيق الأهداف التعليمية باستخدامه لخطط واستراتيجيات تدريسية مبنية على نظريات سيكولوجية تتعامل مع المتعلم من خلال المكونات الثلاث (المعرفي والوجداني أو الانفعالي والمكون النفس حركي أو المهاري) وكذلك تمكنه من استخدام وسائل تعليمية مناسبة لتلاميذه، لذلك فإن تقديم مثل هذه الاستراتيجيات في التدريس تساعد المعلم على تحقيق أهدافه من درسه.

وقد يعترض البعض على فكرة الألعاب بأنها مضيعة للوقت والجهد وإنها قد تمثل فاقداً تعليمياً من حيث الزمن لكن ذلك يدفعنا للقول إنه حتى لو لم يتم تعلم التلاميذ لأية رياضيات منهجية من خلال هذه اللعبة (وهذا غير وارد لأن لكل لعبة هدف محدد وهدف منهجي) تبقى وسيلة تمثل دافعاً أو محركاً لدى

التلاميذ لدراسة الرياضيات إذا ما شعروا بالاستمتاع بلعبها وبالتالي تنمية الاتجاهات الموجبة نحو الرياضيات ودراستها.

وقد يختلف البعض في هذه النقطة من حيث أن كثيراً من التلاميذ قد يستحفظون للعب فقط ولكنهم لا يربطون اللعب بتعلم الرياضيات ويمكن الرد على ذلك بأن ممارسة اللعبة يتطلب فهمها أي فهم فكرتها وإذا توفر الحافز للعب فإن الاستفادة العلمية ستأتي من خلال الممارسة ومن خلال التطبيق فيما بعد الانتهاء من اللعبة.

وتظهر أهمية هذه الاستراتيجية في تعلم الرياضيات إذا ما اعتبرت ذات أهداف فاعلة وقوية في تعلم الرياضيات نظراً لكونها مسلية وممتعة وذات طبيعة تعليمية ومناخ تعليمي يختلف عن النظام الروتيني المعتاد داخل حجرة الدراسة، فالتغير في أسلوب وطريقة التدريس يلعب دوراً أساسياً في فهم التلاميذ لما يقدم لهم داخل حجرة التدريس واستراتيجية الألعاب في تدريس الرياضيات مبنية أساساً على استراتيجية التعلم بالاكشاف الموجه حيث يقوم التلاميذ بالعمل من خلال ممارستهم للعبة ما وبتوجيه من المعلم بالكشف عن حل لهذه المشكلة المبرمجة من قبل المعلم على صورة لعبة يمارسها التلاميذ وبعد أن تتم مرحلة الاكتشاف هذه حيث التوصل إلى صيغة قانون ما أو نظرية ما يتم التطبيق بالأمثلة من جانب المعلم يتبعها عملية التقويم حيث يتم تقديم مجموعة من التطبيقات المباشرة وغير المباشرة للتلاميذ ومن ثم يقوم المعلم بتقويم مدى فهم أو استيعاب التلاميذ لموضوع الدرس.

خطوات استراتيجية الألعاب

1 - تحديد الهدف من اللعبة حيث يتم توضيح الهدف للتلاميذ من قبل المعلم.

2 - التقديم للعبة من قبل المعلم حيث يتم شرح خطوات اللعبة وتحديد المحركات المتنافسة.

- 3 - تحديد المفهوم أو التعميم أو النظرية المستتجة.
- 4 - التطبيق على المفهوم أو النظرية من قبل التلاميذ.
- 5 - التكوين، وهذا خاص بالمعلم للوقوف على مدى تحقق أهداف الدرس.

(3-9) معايير استخدام استراتيجيات الألعاب

لكي نتمكن من الحكم على مدى فاعلية هذه الاستراتيجيات في تحقيق أهداف الدرس يجب أن نتعرف على مجموعة من المعايير والتي يمكن الاسترشاد بها لتقييم هذه الاستراتيجيات التدريسية من هذه المعايير:

- 1 - توجيه أسئلة مسلية وجذابة للتلاميذ بهدف شد انتباههم وتهيئتهم للدرس، فعندما يكون موضوع الدرس مثلاً هو وحدات القياس يقوم المعلم بطرح السؤال التالي مثلاً :

س : انظروا جيداً إلى حجرة الدراسة التي نحن بداخلها هل بإمكاننا وضع :

مليون مكعب من علب الكبريت ؟

مليون باكو من الطباشير ؟

مليون كرة تنس طاوله ؟

مليون كرة قدم ؟

وماذا عن مليون كتاب من كتب الرياضيات التي بين أيديكم ؟

وماذا عن مليون مقعد من المقاعد التي تجلسون عليها ؟

طبعاً ستكون هناك إجابات تدل على عدم الموافقة وإجابات تدل على

الموافقة ولكن تتدرج الأسئلة المنطقية وصولاً إلى مفهوم الحجم وكيفية قياسه.

- 2 - تزويد التلاميذ بما يساعدهم على الكشف أو الابتكار لأن الحقائق

التي يقوم التلاميذ باكتشافها بأنفسهم تبقى أثرها في التعلم طويلاً مقارنة بالحقائق التي تلقن إليهم من المعلم.

وعندما يكتشف التلميذ حقيقة ما فإنه يشعر بالرضا عن نفسه لأنه أسهم في اكتشاف بعض جوانب الرياضيات ولو إنه في الواقع لم يكتشف شيئاً جديداً لأن هذا الكشف مكتشف مسبقاً من قبل العلماء لكن بالنسبة للتلميذ يعتبر كشفاً جديداً.

3 - جعل الرياضيات مادة حية داخل الفصل من خلال :

(أ) تقديم قصص العلماء في الرياضيات ومشاهيرها قديماً وحديثاً والمواقف التي صادفتهم وكانت سبباً في اكتشافاتهم للقوانين والحقائق والنظريات، فتفاحة نيوتن لم تكن أول تفاحة تسقط على شخص، فكثير من المزارعين سقطت عليهم عشرات من حبات التفاح، وديكارت لم يكن أول من شاهد العنكبوت وهو يبني بيته حيث يتحرك يمنة ويسرى فاستطاع ديكارت أن يحدد موضع نقطة في المستوى.

(ب) تقديم أمثلة لاستخدامات الرياضيات في الحياة العامة والخاصة للتلاميذ حتى يجد التلاميذ إجابة للسؤال الذي دائماً يطرح في كل درس جديد ماذا نستفيد من هذا الدرس ؟.

4 - يجب أن تعمل اللعبة على أن تحقق أهدافاً معرفية من قبيل التعرف على مفهوم رياضي أو فهم نظرية رياضية أو التطبيق على مبدأ ما، وكذلك تحقيق أهداف وجدانية من قبيل تنمية اتجاهات موجبة نحو دراسة الرياضيات عن طريق استمتاع التلاميذ باللعبة والتطبيق على المفهوم أو التعميم الذي تسعى اللعبة إلى توضيحه وكذلك يجب أن تحقق اللعبة أهداف مهارية (نفس حركية) كأن يعمل التلاميذ مجسماً أو نموذجاً أو وسيلة لتوضيح المفهوم الرياضي. ويجب أن يحرص المعلم على أن لا تتحول اللعبة إلى مجرد تنافس فوز وخسارة بين التلاميذ قد تؤدي إلى سلبات غير مطلوبة وإنما يجب أن يفهم التلاميذ بداية أن الهدف ليس اللعب بذاته بل فهم المقصود أو الهدف من اللعبة.

5 - عند اختيار المعلم للعبة يجب أن تكون مناسبة للمستوى العمري

للتلاميذ ولزمن الدرس (الحصة) وأن لا تكون قواعدها صعبة الفهم كأن تكون متغيراتها كثيرة وتحتاج إلى وقت طويل لفهمها.

6 - يعمل المعلم دائماً على تنمية روح الفريق أو روح التعاون بين التلاميذ ويفضل أن لا يكون هناك تلاميذ معينين دائمين في كل مجموعة بل تتغير المجموعات بتغير اللعبة حتى لا تتجه اللعبة إلى عمل شلل متنافسة داخل الفصل فيما بعد انتهاء الدرس.

7 - مجال اللعبة دائماً يحدد بحجرة الدراسة أو ساحة المدرسة أو معمل الرياضيات، فالخروج عن هذا المجال قد يقلل من فرص ضبط التلاميذ وكذلك يحتاج إلى وقت أطول من الوقت المحدد للدرس (الحصة).

8 - يجب أن تكون الألعاب المقدمة مدروسة ومخطط لها من قبل المعلم وإذا أمكن أخذ المعلم لآراء زملاءه من المعلمين لتكون بشكل أفضل بما يمنع الحساسية بين المعلمين الزملاء أو مشاركة موجه الرياضيات في المدرسة لهذه الألعاب من حيث التخطيط لها فذلك يكسبها جدية في البناء والتطبيق، والجدير بالذكر أن دور المعلم دائماً يكون موجهًا وحياديًا ومشجعًا لكل فريق أو تلميذ مشارك دون تحيز، فتحيز المعلم إلى فريق بعينه قد تكون له آثار سلبية من حيث كره التلاميذ للمعلم وانعكاس ذلك على تعلمهم.

9 - يجب أن يدرك التلاميذ أن هذه الألعاب تمثل استراتيجيات أو وسائل تدريسية وهي جزء من المنهج وتقدم بهدف تسهيل فهم المعلومات المقدمة لهم وليس الهدف هو الترفيه وضياع الوقت.

10 - يقوم المعلم بإجراء عملية تقويم بعدي في نهاية اللعبة وكذلك في نهاية الدرس من قبيل أن يجيب المعلم عن مجموعة التساؤلات التالية :

أ - هل كانت قواعد اللعبة واضحة للتلاميذ ؟

ب - هل احتاج التلاميذ وقتاً طويلاً لتعلم القواعد ؟

- ج - هل كانت قواعد اللعبة سهلة أم معقدة ؟
 - د - هل شارك جميع التلاميذ في اللعبة ؟
 - هـ - هل استمتع التلاميذ باللعبة ؟
 - و - هل أثرت اللعبة على انضباط التلاميذ داخل الفصل ؟
 - ز - هل استفاد التلاميذ من اللعبة في فهم وحل المسائل ؟
 - ح - هل خبرات التعلم المنشودة كانت واضحة أثناء اللعب ؟
 - ط - هل كانت استجابات التلاميذ للأهداف المعرفية المتعلقة بدراسة الرياضيات في اللعب واضحة⁽³⁵⁾.
 - ي - هل أخذت الطريقة وقتاً طويلاً مقارنة ببساطة المفهوم ؟
 - ك - ما مدى استيعاب التلاميذ للمفاهيم المقدمة بهذه الوسيلة (الطريقة) أم أن الطريقة المتبعة في المدارس (العادية) في التدريس يمكن أن تكون أفضل ؟
- وسنقدم مجموعة من النماذج تمثل استراتيجيات باستخدام الألعاب في تدريس الرياضيات.

(4-9) نماذج لألعاب تدريسية

لعبة (1)

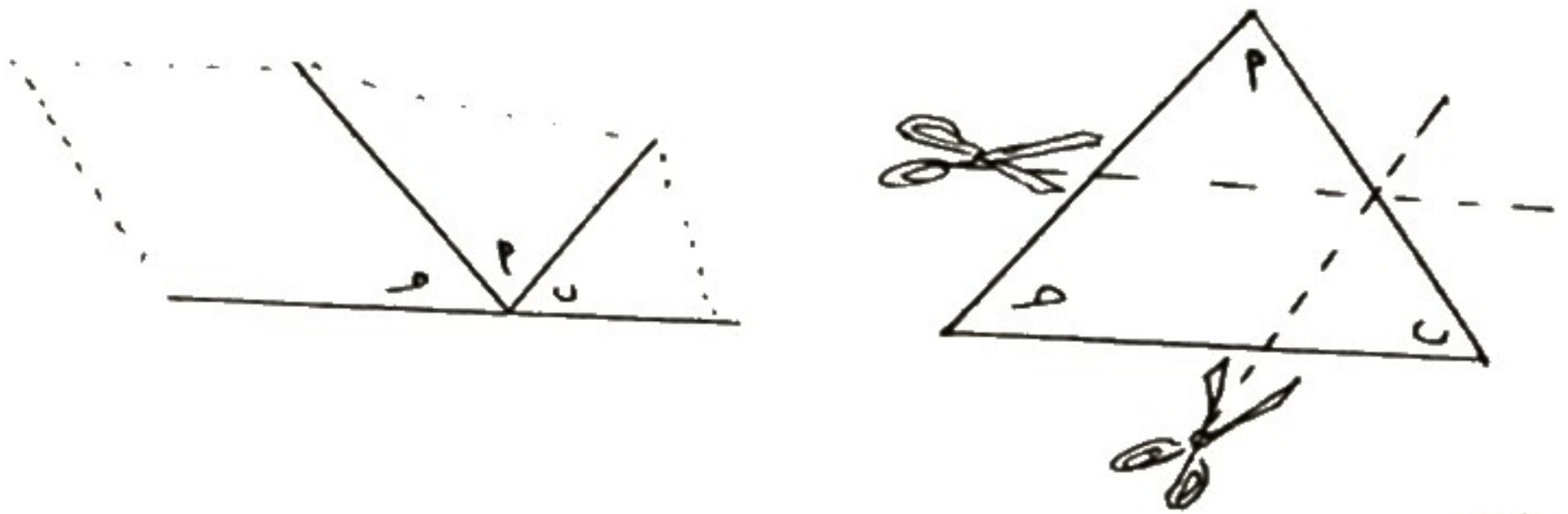
المرحلة : الابتدائية

الهدف : أن يتعرف التلاميذ على أن مجموع زوايا المثلث الداخلة تساوي 180° .

الخطوات :

- 1 - يطلب المعلم من التلاميذ رسم مجموعة من المثلثات المختلفة من حيث الأضلاع والزوايا على ورق مقوى ثم فصل هذه المثلثات.

- 2 - يكتفى بأربع مثلثات لكل تلميذ يرمز لكل مثلث منها بالرمز أ ب جـ.
- 3 - يتم ترقيم المثلثات بالأرقام 1، 2، 3، 4.
- 4 - يطلب من التلاميذ قص الزوايا الثلاث لكل مثلث على حدة.
- 5 - يقوم التلاميذ بترتيب الزوايا المقصوصة متراسة بحيث تكون كل زاويتين متجاورتين مشتركتين في الرأس والضلع.
- 6 - يطلب من التلاميذ وضع حافة المسطرة على الضلعين المتطرفين.
- 7 - ماذا نلاحظ بالنسبة للضلعين المتطرفين ؟....
... على استقامة واحدة ..
- 8 - وماذا تعني الاستقامة ؟ .. بالنسبة للزوايا
.. الزاوية المستقيمة قياسها 180° ..
- 9 - ماذا نستنتج بالنسبة للزوايا الثلاث أ ، ب ، جـ ؟...
... مجموع قياسات الزوايا الثلاث تساوي 180° .
- 10 - هل ينطبق ذلك على باقي المثلثات ؟
«أعد تجربة القص للزوايا وتجميعهم بجانب بعض».



الاستنتاج :

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

تطبيق (1)

ارسم المثلث أ ب ج فيه $\overline{ب ج} = 6$ سم ، $\overline{أ ب} = 5$ سم ، $\overline{أ ج} = 7$ سم .
أوجد مجموع قياسات $\angle أ$ ، $\angle ب$ ، $\angle ج$.

تطبيق (2)

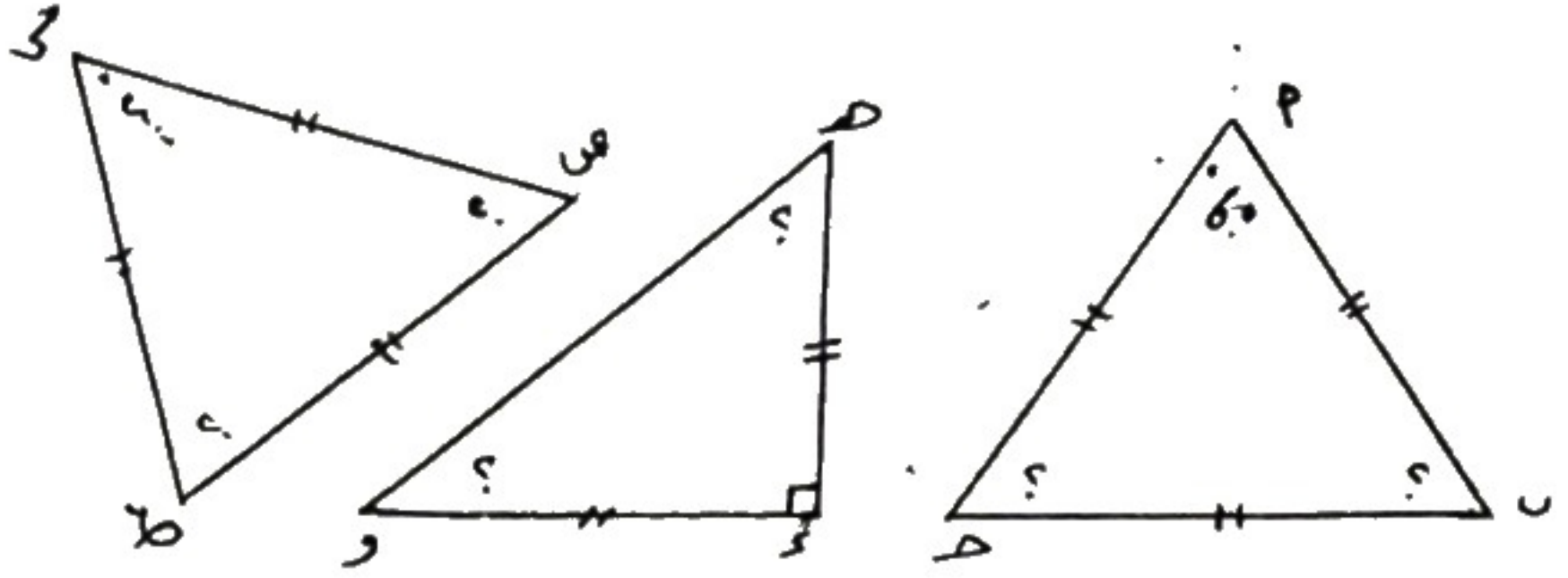
يطلب المعلم من التلاميذ أن يتنافسوا في سرعة حل هذا التطبيق.

يقسم التلاميذ إلى ثلاث مجموعات يطلب منهم نقل الجدول المكتوب على السبورة والمجموعة الأولى عليها إكمال العمود الأول الخاص بزاوية أ والمجموعة الثانية عليها إكمال العمود الثاني الخاص بزاوية ب والمجموعة الثالثة تكمل العمود الثالث الخاص بزاوية ج .

$\angle أ >$	$\angle ب >$	$\angle ج >$	$\angle أ + \angle ب + \angle ج >$
60°	80°	...	180°
...	75°	45°	180°
100°	...	30°	180°
50°	100°	...	180°
...	30°	70°	180°
30°	...	60°	180°

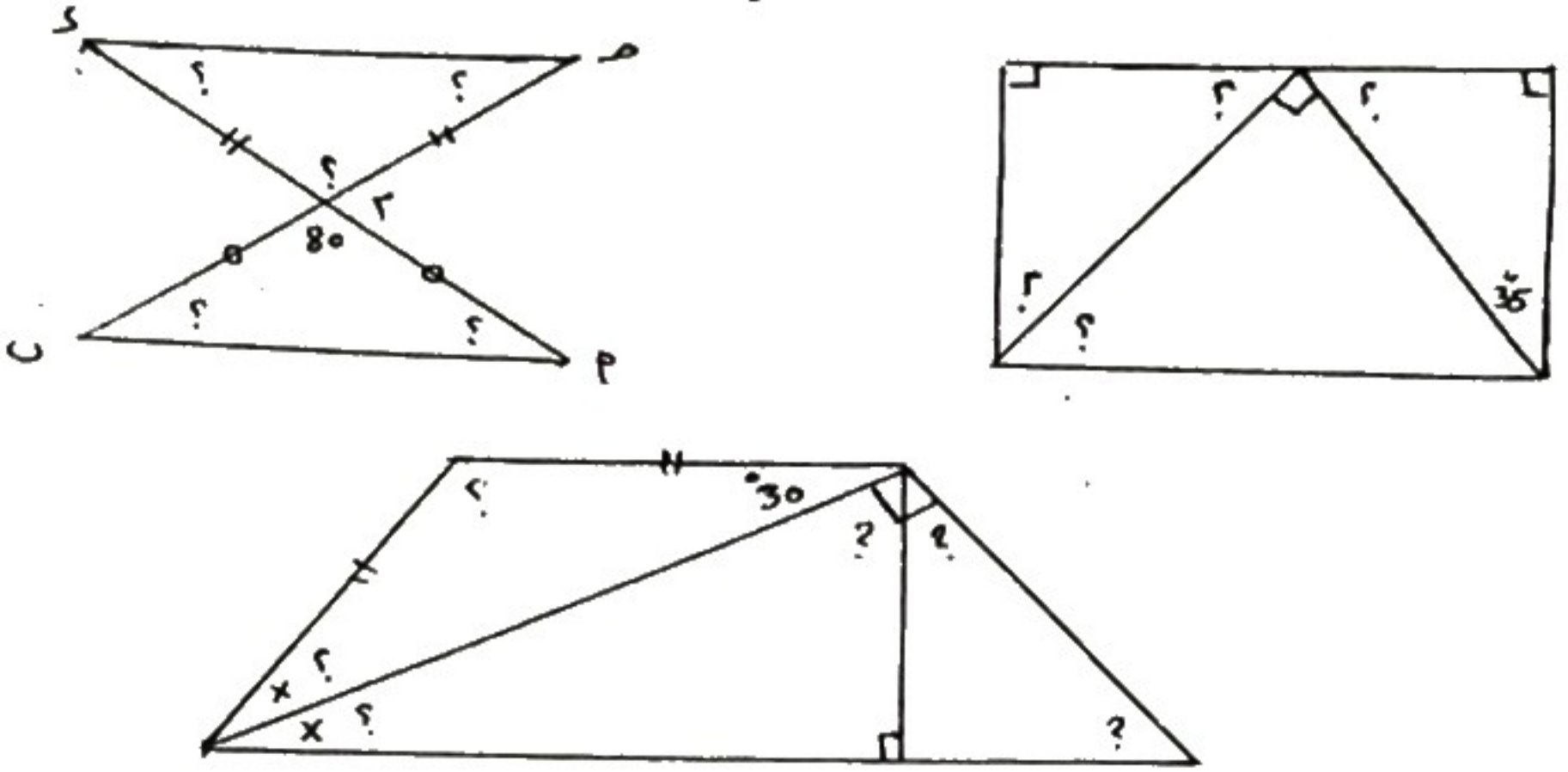
تطبيق (3)

يخرج المعلم مظروفاً به مجموعة من المثلثات إما متساوية الأضلاع أو متساوية الساقين مرسومة على ورق مقوى يعلق هذه المثلثات الواحد تلو الآخر على السبورة ويطلب من المجموعات الثلاث الإجابة بالتناوب عن قياسات الزوايا المجهولة.



تطبيق (4)

أوجد قياسات الزوايا المجهولة في الأشكال التالية :



لعبة (2)

الهدف : اكتشاف أنه في أي مثلث أ ب ج تتناسب أطوال الأضلاع مع جيوب الزوايا المقابلة لها. «قانون الجيب»

المرحلة : الثانوية

الخطوات :

1 - يقوم المعلم بتقسيم الطلاب إلى ثلاثة مجموعات حسب جلوسهم في الفصل.

- 2 - يطلب المعلم من المجموعة اليمنى رسم مجموعة من المثلثات القائمة الزاوية يكفي بثلاث مثلثات أ ب ج، د هـ و، س ص ع.
- 3 - يطلب المعلم من المجموعة الوسطى رسم ثلاثة مثلثات حادة الزوايا وترقم بنفس الترقيم السابق أ ب ج، د هـ و، س ص ع.
- 4 - يطلب المعلم من المجموعة اليسرى رسم ثلاثة مثلثات منفرجة الزاوية وترقم بالرموز أ ب ج، د هـ و، س ص ع.
- 5 - يطلب من التلاميذ ترميز الأضلاع في المثلثات منسوبة إلى الزاوية المقابلة مع وضع (/) شرطة صغيرة أعلى الحرف الذي يشير إلى الزاوية، فالضلع المقابل للزاوية أ نرسم له بالرمز أ أي أن (ب ج = أ) وتصبح الأضلاع المقابلة للزوايا أ، ب، ج هي أ، ب، ج وكذلك في Δ د هـ و تكون الأضلاع د، هـ، و وبالنسبة للمثلث س ص ع تكون الأضلاع هي س، ص، ع.
- 6 - يقوم الطلاب بحساب قياسات كل مثلث من حيث الزوايا والأضلاع باستخدام المسطرة والمنقلة.
- 7 - يطلب من الطلاب إكمال الجدول التالي (يكون المعلم قد رسمه على السبورة).

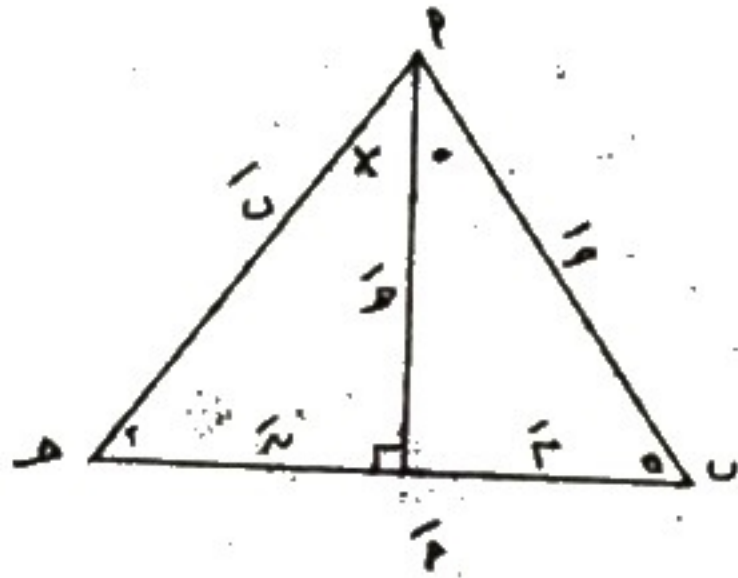
الخطوات	Δ أ ب ج	Δ د هـ و	Δ س ص ع
1	أ' = ... سم ب' = ... سم ج' = ... سم	د' = ... سم هـ' = ... سم و' = ... سم	س' = ... سم ص' = ... سم ع' = ... سم
2	جا أ = ... جـا ب = ... جا ج = ...	جاد = ... جا هـ = ... جا و = ...	جاس = ... جا ص = ... جاع = ...

$\dots = \frac{\text{س}'}{\text{جا س}}$ $\dots = \frac{\text{ص}'}{\text{جا ص}}$ $\dots = \frac{\text{ع}'}{\text{جا ع}}$	$\dots = \frac{\text{د}'}{\text{جا د}}$ $\dots = \frac{\text{هـ}'}{\text{جا هـ}}$ $\dots = \frac{\text{و}'}{\text{جا و}}$	$\dots = \frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}}$ $\dots = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}}$ $\dots = \frac{\text{ج}'}{\text{جا ج}}$	3
الاستنتاج : في أي مثلث أ ب جـ يكون : «قانون الجيب» $\frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}}$			4

- استخدام الآلة الحاسبة يكون أفضل في هذه العمليات.
- يمكن أن يكون المعلم مجهزاً لهذا الجدول عن طريق التصوير ويوزعه على الطلاب وذلك توفيراً للوقت.

تطبيق (1)

في الشكل المقابل أكمل ما يأتي:



$$1 - \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{م}'}{\text{...}} = \frac{\text{ا}'}{\text{...}}$$

$$2 - \frac{\text{جـ}'}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{ب}'}{\text{جا ب}} = \frac{\text{ا}'}{\text{جا ا}}$$

$$3 - \frac{\text{ن}'}{\text{...}} = \frac{\text{...}}{1} = \frac{\text{...}}{\text{جا جـ}}$$

تطبيق (2)

أ ب جـ مثلث فيه $\angle ق = 90^\circ$ ، $\angle جـ = 30^\circ$ ، $ب = 4$ سم
أوجد طول كل من جـ ، أ باستخدام قانون الجيب.

لعبة (3)

المرحلة : الثانوية

الهدف : أن يكتشف الطلاب قانوناً لإيجاد مجموع ن حذاً الأولى من حدود المتوالية الحسابية 1، 2، 3، 4، ...، ن. على الترتيب.

الخطوات :

- 1 - تتم المنافسة بين اطلاب على أساس المجموعات الثلاث المقسمين عليها حسب جلوسهم في مقاعدهم على أن يقوم المعلم بتوزيع الطلاب الممتازين بالتساوي على المجموعات الثلاث.
- 2 - يطلب المعلم من الطلاب كتابة الصور الثلاث ومن ثم إكمال الصورة الرابعة والخامسة والسادسة وكذلك استنتاج الحد العام للمجموع.

$$\text{ص1 : } 1 + 2 + 3 = \frac{4 \times 3}{2}$$

$$\text{ص2 : } 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{5 \times 4}{2}$$

$$\text{ص3 : } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{6 \times 5}{2}$$

$$\text{ص4 : } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \dots$$

$$\text{ص5 : } 1 + 2 + 3 + \dots + 7 = \dots$$

$$\text{ص6 : } 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \dots$$

الاستنتاج :

$$1 + 2 + 3 + \dots + \text{ن} = \dots$$

$\frac{\text{ن}(\text{ن} + 1)}{2}$	الجواب
------------------------------------	--------

- 3 - يجمع المعلم إجابات الطلاب لتحديد المجموعة الفائزة وهي التي تحتوي على أكبر عدد من الإجابات الصحيحة.

4 - يقوم المعلم بتوضيح العلاقة بين رموز الجواب (مجموع المتوالية)، وحدود هذه المتتالية عن طريق تقديم مجموعة من الأسئلة من قبيل :
س1 : في الصورة التي استنتجتموها $\frac{n(n+1)}{2}$ ماذا نعني بالرمز ن ؟ ..
(عدد الحدود)

س2 : ماذا نعني بالقيمة 1 ؟ (الحد الأعلى)

س3 : ماذا نعني بالقيمة ن + 1 الحد الأخير + الحد الأول

الاستنتاج العام :

مجموع ن من حدود المتتالية يساوي عدد الحدود مقسوماً على 2 مضروباً في (الحد الأخير + الحد الأول).

تطبيق (1)

بدون استخدام الورقة والقلم أوجد مجموع حدود المتتالية التي سبق ذكرها إذا كان الحد الأول هو واحد والحد الأخير هو 100 ؟

$$\text{الجواب : } \frac{100}{2} (1 + 100) = 101 \times 50 = 5050$$

تطبيق (2)

أوجد مجموع المتتالية :

$$31 + 32 + \dots + 100 \text{ ؟}$$

يقوم المعلم بجمع إجابات الطلاب وملاحظة أن :

1 - مجموعة من الطلاب قامت بحل التطبيق مباشرة بتطبيق القاعدة كالتالي:

$$\text{المجموع} = \frac{100}{2} (31 + 100)$$

$$= 50 (131)$$

$$= 6550$$

وهذه الإجابة توضح للطلاب إنها خاطئة لماذا؟...

لأن عدد الحدود هنا لا يساوي 100

∴ كم الحدود وكيف نحسبه ما دامت الحدود لا تبدأ من الواحد؟..

لحساب عدد الحدود في هذه الحالة :

$$\text{الحد الأخير} - \text{الحد الأول} + 1 = 100 - 31 + 1$$

$$= 70 \text{ عدد الحدود}$$

$$\text{تطبق الآن القاعدة} = \frac{70}{2} (31 + 100) = 35 (131)$$

$$= 4585$$

2 - مجموعة أخرى استطاعت أن تحسب مجموع الثلاثين حدًا الأولى

وتحسب مجموع المائة حدًا بدءًا من الواحد ونقوم بطرح المجموع الأول

من المجموع الثاني يكون هو المطلوب :

$$30\text{ح} = \frac{30}{2} (30 + 1) = 15 \times 31 = 465$$

$$100\text{ح} = \frac{100}{2} (100 + 1) = 50 \times 101 = 5050$$

$$\therefore 31 + 31 + \dots + 100 = 5050 - 465$$

$$= 4585$$

تطبيق (3)

أوجد مجموع المتتالية :

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99$$

عندما يجمع المعلم إجابات الطلاب سيجد غالبيتهم طبقوا القانون مباشرة باعتبار

عدد الحدود 99.

والبعض الآخر حاول أن يوجد عدد الحدود بالطريقة $(99 - 1 + 1)$

ولكن هذه لا تصلح إلا عندما تكون الزيادة واحد بين كل حد والحد السابق له مباشرة.

بعض أو قلة من الطلاب من يستطيعوا إيجاد عدد الحدود يقوم المعلم بتوضيحها عن طريق إيجاد الحد العام للعدد الفردي وهو $2n - 1$ ولإيجاد رتبة العدد 99

$$\therefore 2n - 1 = 99$$

$$2n = 100 \Rightarrow n = 50$$

$\therefore$ عدد الحدود يساوي 50 ويتم تطبيق القاعدة بعد ذلك مباشرة.

$$\text{المجموع} = \frac{(99 + 1)50}{2}$$

$$= 50 \times 50$$

$$= 2500$$

تطبيق (4)

هل يمكن إيجاد قاعدة عامة لحساب مجموع n الأولى من حدود المتتالية

العددية الفردية.

أي مجموع :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = ?$$

يسأل المعلم طلابه عن عدد الحدود في هذه الحالة ؟ .. (ن حدًا)

ما قيمة الحد الأخير ؟ ... $(2n - 1)$

$$\text{القاعدة المتبعة} = \frac{n}{2} (1 + 2n - 1)$$

$$= \frac{n}{2} (2n)$$

$$= n^2$$

= مربع عدد الحدود الأولى.

س : ما هو مجموع الأعداد الفردية الأولى حتى الحد المعين فيما يلي ؟

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots = 4^2 = 16$$

$$1 + 3 + \dots + 15 = 8^2 = 64 \quad \text{يحسب الطالب عدد الحدود}$$

بسهولة.

$$2500 = 1 + 3 + \dots + 99 + \dots - 50^2$$

سبق أن عرف الطالب عدد الحدود.

تطبيق (5)

كون المتتالية التي حدها الأول 5 وكل حد يزيد عن الحد السابق له مباشرة بمقدار 5.

$$\dots, 20, 15, 10, 5, \dots$$

كون المتتالية التي حدها الأول أ والزيادة د.

$$\dots, 15 + أ, 10 + أ, 5 + أ, أ, \dots$$

كون المتتالية التي حدها الأول أ والزيادة د.

$$\dots, 3 + د, 2 + د, 1 + د, أ, \dots$$

في المتتالية السابقة ما قيمة كل من :

$$ح_1 = \dots$$

$$ح_2 = \dots$$

$$ح_3 = \dots$$

$$ح_{17} = \dots$$

$$ح_n = \dots$$

هذا يسمى الحد النوني (الحد العام) للمتتالية (المتوالية) الحسابية (العديّة) التي حدها الأول أ والزيادة (الأساس) د.

تطبيق (6)

$$212, \dots, 11, 8, 5, 2$$

ما هي رتبة الحد الأخير ؟

$$\therefore \text{الحد العام } أ + (ن - 1) د = 2 + (ن - 1) (3)$$

$$(3) (ن - 1) + 2 = 212$$

$$(3) (ن - 1) = 210$$

$$ن - 1 = 70$$

$$\therefore \text{رتبة هذا الحد هي } 71 \quad ن = 71$$

أي عدد الحدود = 71.

تطبيق (7)

سبق أن عرفنا في المتتالية (المتوالية) الحسابية (العددية) أن مجموع

ن حذا الأولى يعطي بالقاعدة $\frac{ن}{2}$ (الحد الأخير + الحد الأول)

باعتبار الحد الأخير ح = $أ + (ن - 1) د$

الحد الأول ح₁ = أ

د هي الزيادة أو الأساس.

عبر عن مجموع المتتالية الحسابية بدلالة عدد الحدود والحد الأول والأساس ؟

ملاحظة : (د الزيادة قد تكون موجبة وقد تكون سالبة).

$$\dots \text{ ح} = \frac{ن}{2} [أ + ح]$$

$$= \frac{ن}{2} [أ + أ + (ن - 1) د]$$

$$= \frac{ن}{2} [2أ + (ن - 1) د]$$

وهذا هو مجموع ن حذا الأولى من حدود المتتالية التي حدها الأول أ والزيادة د.

تطبيق (8)

أوجد مجموع الخمسين حذا الأولى ن المتتالية الحسابية

2 ، 4 ، 6 ، 8 ، ... ، ...

يمكن للطلاب تطبيق القاعدة السابقة مباشرة. حيث :

$$ن = 50 ، د = 2 ، أ = 2 .$$

لعبة (4)

الهدف : أن يطبق الطلاب مفهوم مجموع المتواليات الحسابية عملياً.

يقسم المعلم طلاب فصله إلى المجموعات الثلاث المتكافئة من حيث مستوى الذكاء والتحصيل الدراسي بقدر الإمكان.

يأخذ المعلم طلابه إلى ساحة المدرسة حيث :

- 1 - تقوم المجموعات الثلاث برسم ثلاثة خطوط متوازية متباعدة على الأرض طول كل خط 100 متر.
- 2 - تقسم هذه المسافة إلى أقسام متساوية طول كل مسافة جزئية أربعة أمتار.
- 3 - يتم وضع عصا صغيرة عند كل نقطة من هذه التقسيمات.
- 4 - تصطف مجموعات الطلاب الثلاث عند بداية كل خط ويوضع سلة عند نقطة البداية من السباق وحيث توجد العصا الأولى.
- 5 - يطلب من المتسابقين على الترتيب في كل مجموعة جمع العصي عصا عصا ووضعها في السلة التي في بداية السباق.
- 6 - ينظم الطلاب في عملية الجري بحيث يتابعهم المعلم كي لا يحدث فوضى.
- 7 - الفريق الذي يجمع العصي جميعها من على خط السباق وفي أسرع وقت هو الفريق الفائز.
- 8 - يبدأ السباق بأن يبدأ أول طالب في كل مجموعة بأخذ العصا الأولى ويضعها في السلة مع بداية صافرة المعلم، وعلى الفور يقوم الطالب الذي يليه في نفس المجموعة بالجري لأخذ العصا الثانية من على الخط ويعود لوضعها في السلة ثم يبدأ الطالب الثالث في الجري ليجمع العصا الثالثة ويعود لوضعها في السلة وهكذا يستمر الطلاب في الجري التتابعي حتى ينتهوا من جمع العصي جميعها في السلة، قد يحدث أن يجري

طالب أكثر من مرة عندما يكون عدد الطلاب أقل من عدد العصي.
بعد أن ينتهي الطلاب المتسابقون من جمع العصي يجمع المعلم طلابه
ويقوم بتوجيه مجموعة من الأسئلة مثل :

س 1 : كم عدد المسافات ذات الأربعة أمتار على الخط ؟

$$.... 25 = 4 \div 100$$

س 2 : كم عدد النقاط (العصي) على الخط من البداية وحتى النهاية ؟

$$.... 26 = 1 + 25$$

المتسابق الأول لم يتحرك أي مسافة غير أنه أخذ العصا ووضعها في
المسلة.

المتسابق الثاني جرى أربعة أمتار وعاد أربعة أمتار.

المتسابق الثالث جرى ثمانية أمتار وعاد ثمانية أمتار.

المتسابق الأخير جرى مائة مترًا وعاد مائة أخرى إيابًا.

س 3 : المسافة الكلية المقطوعة بالأمطار ؟

$$= 2 [4 + 8 + 12 + + 100]$$

س 4 : ماذا تسمى هذه الصورة ؟

متتالية حسابية حدها الأول 4 والأساس د = 4 وعدد الحدود = 25

س 5 : كم طول المسافة المقطوعة إذن ؟

$$= 2 \times \frac{25}{2} [4 (1-25) + 4 \times 2]$$

المسافة المقطوعة ذهابًا وإيابًا تساوي حوالي 5 كيلو مترات تقريبًا.

لعبة (5)

المرحلة : الثانوية

الهدف : أن يتعرف الطلاب على مفهوم التباديل

الخطوات :

يكتب المعلم على السبورة مجموعة من الصور الرمزية ويطلب من مجموعات التلاميذ الثلاث العمل على إكمال الصور المطلوبة ومن ثم التوصل إلى الاستنتاج المطلوب.

$$1 = {}_1\Delta$$

$$1 \times 2 = {}_2\Delta$$

$$1 \times 2 \times 3 = {}_3\Delta$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = {}_4\Delta$$

$$\dots = {}_5\Delta$$

$$\dots = {}_6\Delta$$

$$\dots = {}_{20}\Delta$$

الاستنتاج :

$$\dots = {}_n\Delta$$

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots (2 - n) (1 - n) = {}_n\Delta$$

بعد أن يتوصل الطلاب للاستنتاج يقترح المعلم تسمية الصورة ${}_n\Delta$ بمضروب n وسنرمز له برمز جديد هو $n!$ وعلى ذلك :

$$1 \times 2 \times \dots \times 8 \times 9 = 9! , 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5!$$

ويضاف إلى ذلك تعريف أن $0! = 1$ مضروب الصفر يساوي الواحد.

تطبيق (1)

أوجد قيمة أ - $\frac{5}{7} + \frac{7}{5}$

$\frac{1+n}{n}$

ب - $\frac{1}{n}$

$\frac{3}{6} \cdot \frac{6}{7}$

ج - $\frac{7}{7}$

تطبيق (2)

يطلب المعلم من الطلاب ملاحظة الصور الأربعة المكتوبة على السبورة ومعرفة العلاقة بين عناصرها ومن ثم إكمال باقي الصور.

$$4 \times 5 \times 6 = \frac{6}{3}$$

$$2 = \frac{2}{1}$$

$$6 \times 7 \times 8 \times 9 = \frac{9}{4}$$

$$3 \times 4 = \frac{4}{2}$$

$$49 \times 50$$

$$\dots = \frac{50}{2}$$

$$96 \times 97 \times 98 \times 99 \times 100$$

$$\dots = \frac{100}{5}$$

أكمل الإجابة عن الأسئلة التالية :

س1 : ما هي العلاقة بين العدد في البسط والعدد في المقام وما علاقتهم بالعدد الأخير من الناتج ؟

... في حالة الأولى يكون عدد مرات الضرب التنازلي يساوي العدد في

المقام (في المربع السفلي).

الحد الأخير يساوي الحد الأول (العلوي) - الحد الثاني (السفلي) + 1

$$96 \times 97 \times 98 \times 99 \times 100 = \frac{100}{5} \text{ في حالة}$$

$$1 + 5 - 100 = 96 \text{ ويكون الحد الأخير}$$

س2 : ما هو الحد الأخير في الصور التالية ؟

$$14 = 1 + 7 - 20 \quad \dots = \frac{20}{7}$$

$$14 = 1 + 3 - 16 \quad \dots = \frac{16}{3}$$

$$1 - n = 1 + 2 - n \quad \dots = \frac{n}{2}$$

$$r > n, \quad 1 + r - n \quad \dots = \frac{n}{r}$$

أكمل :

$$\dots = \frac{n}{r} \quad n (1 - n) (2 - n) \dots (1 + r - n).$$

يقوم المعلم بالطلب من طلابه ماذا لو عدلنا الصورة الصعبة في الكتابة

وهي المربعين إلى الصورة التالية :

$$2^5 = \frac{5}{2} \quad \text{وتسمى تباديل خمسة عناصر مأخوذة من مثنى مثنى}$$

$$n! = \frac{n}{r} \quad \text{تبادل ن عنصراً مأخوذة راء راء .}$$

وعلى ذلك :

$$8 \times 9 \times 10 \dots = {}_3P_{10}$$

تطبيق (3)

أكمل ما يأتي :

$$n (n-1) (n-2) \dots (n-r+1) (n-r) (n-r-1) \dots = 1 \times 2 \times 3 \dots$$

الجواب لـ n (1)

$$n (n-1) (n-2) \dots = (n-r+1) (n-r) \dots$$

الجواب $= {}_n P_r$ (2)

$$\dots = 1 \times 2 \times 3 \times \dots (n-r+1) (n-r) (n-r-1) \dots$$

الجواب $= {}_n P_r$ (3)

ما العلاقة من كل من (1)، (2)، (3)

$$\frac{{}_n P_n}{{}_n P_r} = n (n-1) \dots (n-r+1)$$

تطبيق (4)

باستخدام فكرة المضروب أوجد قيمة ${}_2 P_6 \cdot {}_3 P_7 = \dots$

$$\frac{{}_2 P_6}{{}_4 P_4} \cdot \frac{{}_3 P_7}{{}_3 P_7} = \frac{{}_2 P_6}{{}_3 P_7} \cdot \frac{{}_3 P_7}{{}_4 P_4}$$

$$\frac{2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$25 \cdot 36 \cdot 7 = (5 \cdot 6 \cdot 7) (5 \cdot 6) =$$

$$6300 =$$

تطبيق (5)

إذا كان $2^L = 6$ فما قيمة n ؟

الجواب ... $n(1-n) = 2 \times 3 \therefore n = 3$

أي $n^2 - n = 6 \Leftrightarrow n^2 - n - 6 = 0 \Leftrightarrow (n-3)(n+2) = 0$

$\therefore n = 3$ ، $n = -2$ لاغية. لماذا ؟

لعبة (6)

المرحلة : الإعدادية

الهدف : أن يتعرف الطالب على بعض مهارات التفكير الرمزي والعلاقي.

الخطوات :

يطلب المعلم من طلابه أن يختاروا أي عدد أقل من 99 بحيث يكتب كل طالب الرقم الذي اختاره في ورقة خاصة ثم يطلب منهم القيام بالعمليات الآتية:

1 - يكتب الطالب عمره بالأعداد الصحيحة في الورقة.

2 - يضاعف الطالب عمره (الضرب في 2).

3 - يضيف 5 إلى الناتج ثم يضرب الناتج في مائة.

4 - يقسم الناتج على 2.

5 - يطرح من الناتج عدد أيام السنة (365).

6 - يضيف للناتج الأخير العدد الذي اختاره أولاً.

يقوم المعلم بكتابة بعض النتائج التي توصل إليها تلاميذه مع كتابة اسم كل طالب أعلى النتيجة حيث يقوم المعلم بإضافة 115 إلى العدد المكتوب فيحصل على عدد مكون من أربعة أو ثلاث أرقام. فالرقمان على اليسار في العدد يمثلان عمر الطالب والرقمان اللذان على اليمين في العدد يمثلان العدد الذي اختاره الطالب.

فمثلاً :

ليكن عمر الطالب 14 سنة والرقم المختار 57.

الخطوات : $14 \leftarrow 28 \leftarrow 33 \leftarrow 3300$

$$1285 \leftarrow 1650 \leftarrow 1650 - 365 = 1285$$

$$1285 + 57 = 1342$$

$$1342 + 115 = 1457$$

$$\boxed{14} \boxed{57} =$$

∴ الرقم المختار 57 والعمر للطالب 14 سنة.

لعبة (7)

الهدف : أن يتمكن الطالب من التحويل من الصورة اللفظية إلى الصورة الرمزية.

أ - لديك ثلاثة أعداد س، ص، ع على الترتيب فإذا كان مربع العدد الأول مضافاً إليه حاصل ضرب العددين الثاني والثالث يساوي 16 فما التعبير الرمزي لذلك ؟

$$\text{الإجابة} \quad س^2 + س ص = 16$$

ب - إذا ضربنا العدد س في ثلاثة وأضفنا إليه 9 كان الناتج مساوياً 15 ؟

$$\text{الإجابة} \quad 3 س + 9 = 15$$

ج - إذا طرحنا من العدد ص ثلاثة أمثال العدد ع كان الناتج مساوياً ضعف العدد س.

$$\text{الإجابة} \quad ص - 3 ع = 2 س$$

د - مجموع مربعي العددين س، ص أكبر من أو يساوي مجموع العددين مضافاً إليهما خمس وعشرون.

الإجابة : $س^2 + ص^2 \leq س + ص + 25$

هـ - عبر بالرموز عن الجملة «ستة وخمسون مضافاً إليها ستة وخمسون مضافاً إليها ستة وخمسون وهكذا عدد المرات للإضافة ستة وخمسون مرة.

الإجابة : $(56)^2$. في أبسط صورة.

ل - نعرفون أن كلمة He تعني باللغة الإنجليزية هو وأن كلمة She تعني هي فإذا كانت :

$$She = {}^2(He)$$

فماذا قيمة كل من الرموز S, H, E .

الإجابة : $س = 5$, $H = 2$, $E = 6$

لعبة (8)

الهدف : أن يحدد الطالب العلاقة بين الشكل والعدد.

يقوم المعلم بكتابة هذين السطرين بالأشكال والأعداد ثم يطلب من كل مجموعة من المجموعات الثلاث في الفصل أن يربطوا بين الشكل والعدد ومن ثم معرفة الناتج في السطر الثالث.

أ - إذا كان :

$$10 = \square + \Delta 2$$

$$14 = \text{شكّل سداسي} + \square + \square$$

فإن :

$$.... = \text{شكّل خماسي} + (\Delta) 4$$

الجواب : 17 .

ملاحظة :

يقدم المعلم للطلاب مفهوم التفكير العلاقي كأسلوب من أساليب التفكير التي تقوم على إدراك العلاقات بين العوامل والعناصر المختلفة في الموقف الرياضي⁽⁵²⁾.

ب - إذا كان :

$$س * ص = (س + ص) + \frac{س.ص}{3}$$

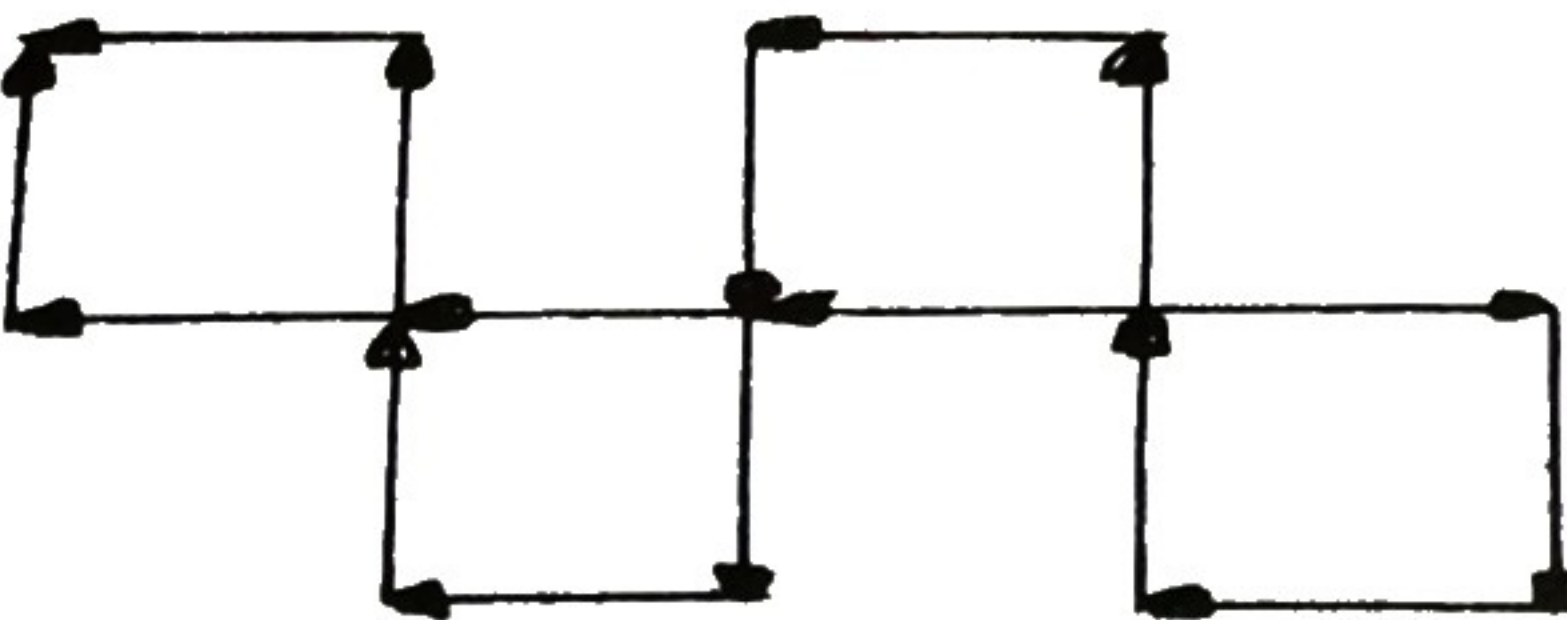
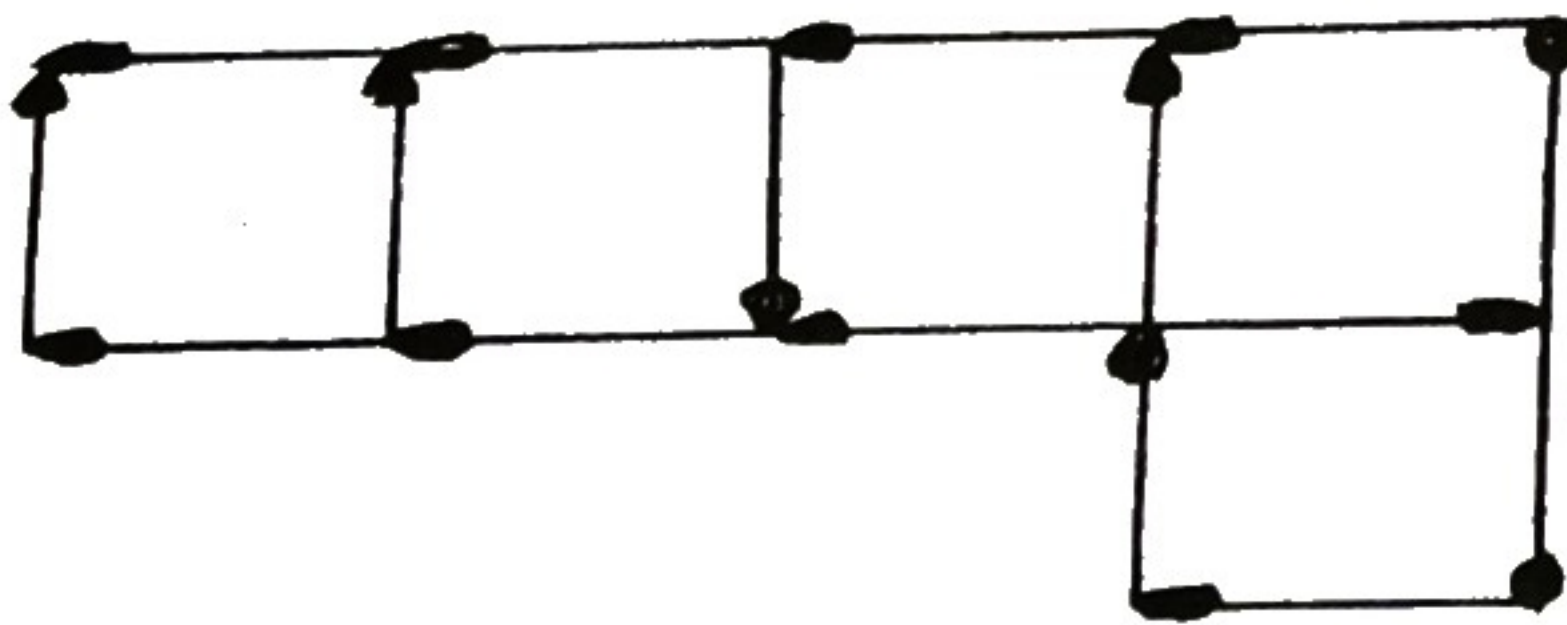
فإن :

$$12 * 1 = \dots \quad \text{الجواب 17}$$

$$7 * 3 = \dots \quad \text{الجواب 17}$$

$$5 * (2 * 6) = \dots \quad \text{الجواب 37}$$

ج - لديك ستة عشر عودًا من عيدان الثقاب موضوعة على خمس مربعات متساوية، والمطلوب منكم تحريك ثلاثة عيدان فقط من المجموعة في أماكن جديدة بحيث نحصل على أربعة مربعات متساوية وبنفس العدد من العيدان.



الحل :

لعبة (9)

الهدف : أن يتذوق الطلاب القيم الجمالية في الرياضيات

المرحلة : الثانوية

أ - يطلب المعلم من تلاميذه قراءة وكتابة العدد 12345679 في كراريسهم ويكلف مجموعات من التلاميذ للقيام بعملية ضرب هذا العدد في الأعداد: 9 ، 18 ، 27 ، 36 ، 45 مضاعفات العدد (9) ثم تكتب النواتج على السبورة بترتيب معين.

فتجد :

$$111 \ 111 \ 111 = 9 \times 12345679$$

$$222 \ 222 \ 222 = 18 \times$$

$$333 \ 333 \ 333 = 27 \times$$

$$444 \ 444 \ 444 = 36 \times$$

$$555 \ 555 \ 555 = 45 \times$$

بعد ذلك يطلب المعلم من التلاميذ حساب قيمة حاصل ضرب العدد السابق في الأعداد 54 ، 63 ، 72

ب - يطلب المعلم من التلاميذ حساب قيمة :

$$1 = 1 + 0 \times 9$$

$$11 = 2 + 1 \times 9$$

$$111 = 3 + 12 \times 9$$

$$1111 = 4 + 123 \times 9$$

$$11111 = 5 + 1234 \times 9$$

$$..... = 8 + 1234567 \times 9$$

ج - يطلب المعلم من التلاميذ إيجاد قيمة الكسر العشري الناقص من خلال الكسور المعطاة :

$$0.\overline{09} = 0.09090909 = \frac{1}{11}$$

$$0.\overline{18} = 0.1818181818 = \frac{2}{11}$$

$$0.\overline{27} = 0.27272727 = \frac{3}{11}$$

$$0.\overline{36} = 0.36363636 = \frac{4}{11}$$

:

$$\dots\dots\dots = \frac{10}{11}$$

لاحظ مجموع الخانتين العشريتين المكررتين.

(5-9) المربعات السحرية

لعبة (10)

هذه الألعاب نقلها العرب قديماً عن الهنود والذين كانوا يستخدمونها في السحر ولقد أبدع فيها العلامة العربي المسلم ثابت بن قره الحراني بهدف تنمية القدرة الإبداعية لدى الفرد وكذلك القدرة الجمالية للأعداد. والمربع السحري عبارة عن مربع ذي ن² عنصراً بحيث يكون مجموع الأعداد في الصفوف أو في الأعمدة أو في الأقطار متساوياً.

الخطوات :

يطلب المعلم من طلابه رسم مربع كبير وتقسيمه إلى تسع مربعات متساوية ومن ثم توزيع الأعداد من 1 إلى 9 على هذه المربعات بحيث يكون مجموع الأعداد في كل سطر أو عمود أو قطر مساوياً 15.

لتوضيح فكرة تكوين الجدول بمشاركة التلاميذ في اللعبة.

مجموع الأعداد في المربعات التسعة :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{9(9+1)}{2}$$

$$45 =$$

$$\frac{45}{3} = \text{مجموع الأعداد في كل صف أو عمود}$$

$$15 =$$

$$60 = \text{القطران} + \text{الصف الأول} + \text{العمود الأوسط}$$

وهذا يساوي

$$60 = \text{المربع كاملاً} + 3 \text{ أضعاف الخانة الوسطى}$$

$$15 = 45 + 3 \text{ س}$$

$$5 = \text{(الخانة الوسطى) س}$$

الخانة الوسطى تملأ بالقيمة 5.

مجموع العددين الآخرين يساوي 10 فهما إما زوجيان أو فرديان معاً.

إذن الأطراف تعبأ بالأعداد الزوجية (2، 4، 6، 8)

والأواسط تعبأ بالأعداد الفردية (1، 3، 5، 7، 9).

ويكون المربع كالتالي :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

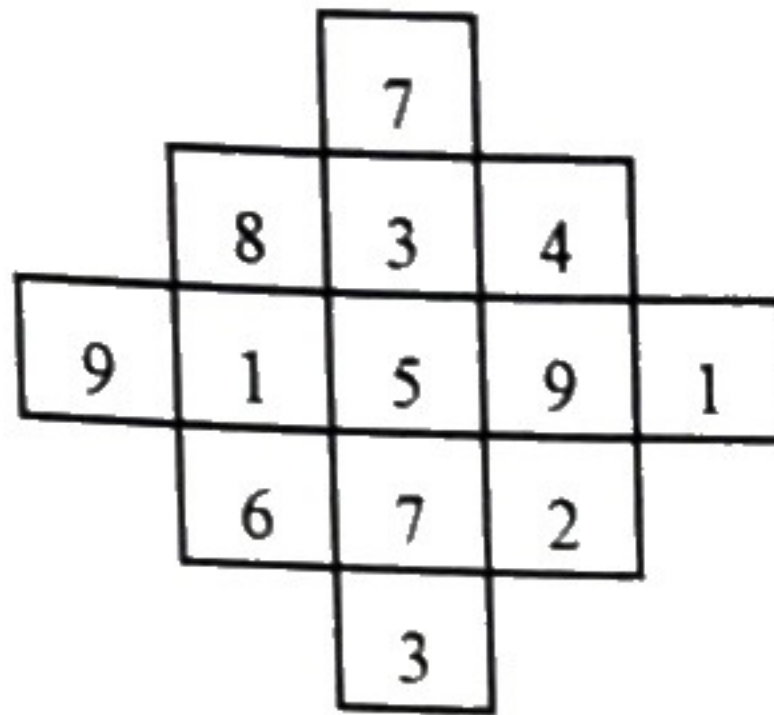
ويمكن إكمال المربعات بطريقة روتينية سهلة عن طريق إضافة أربع مربعات

خارجية مجاورة للمربعات الوسطى الطرفية.

ثم نبدأ بوضع الأعداد من 1 إلى 9 في اتجاه مواز للقطر بحيث يترك سطرًا بين

كل سطرين مائلين.

بعد ذلك ننقل الأعداد في المربعات الخارجية في الخانة المقابلة على نفس السطر والبعيدة عن العدد.

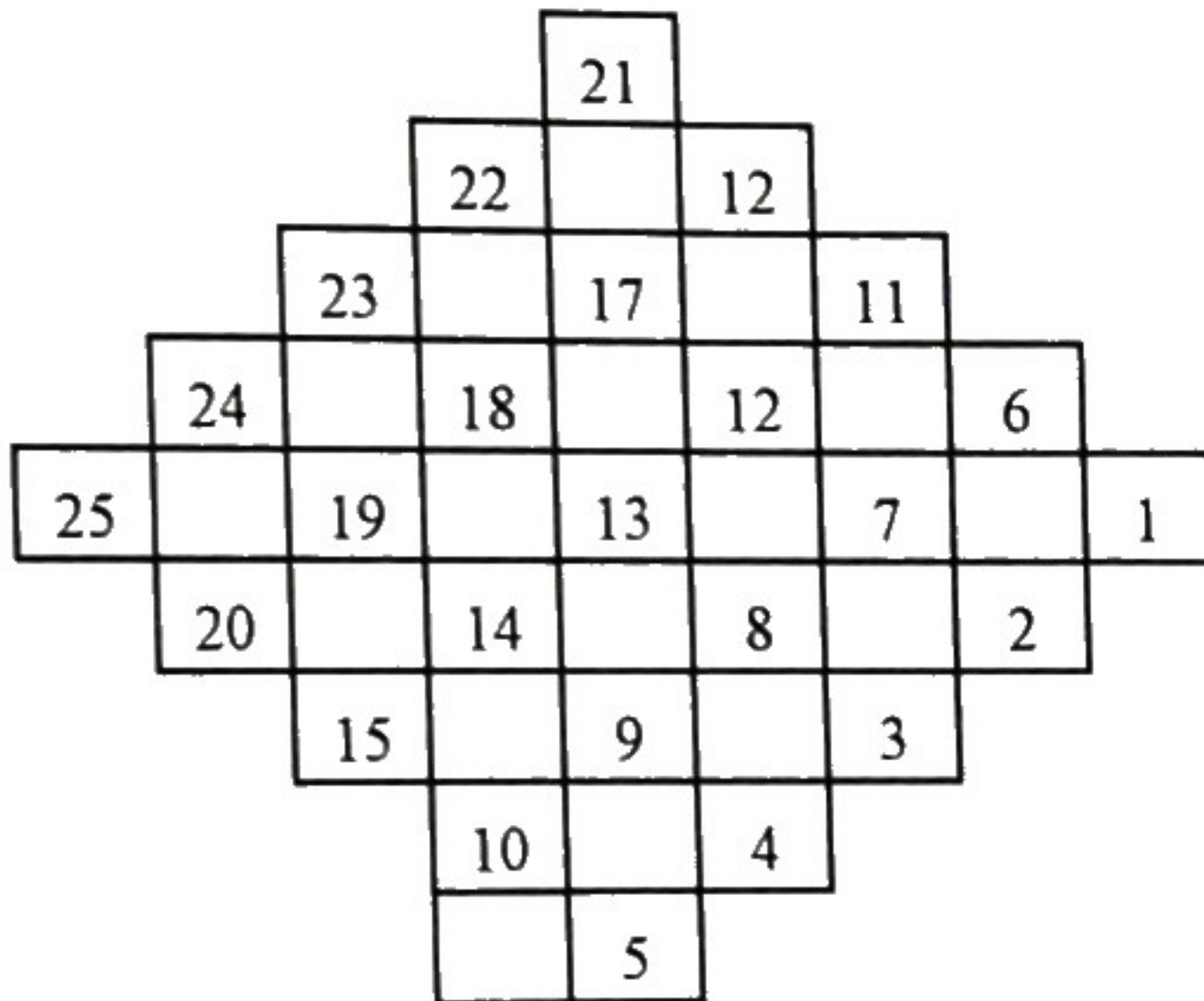


وبالمثل في حالة المربع الوفاقي الخماسي حيث مجموع الأعداد في كل سطر أو عمود أو قطر يساوي (65) لأن :

$$(25 + 1) \frac{25}{2} = 25 + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$13 \times 25 =$$

$$65 = \frac{13 \times 25}{5} = \text{المجموع في كل سطر أو عمود}$$



		23	10	17	4	11	
		6	18	5	12	24	
		19	1	13	25	7	
		2	14	21	8	20	
		15	22	9	16	3	

الفصل العاشر

التقويم Evaluation

- | | |
|-----------------------------------|---------|
| مقدمة | (1-10) |
| ما المقصود بعملية التقويم | (2-10) |
| أنماط التقويم | (3-10) |
| أدوات التقويم | (4-10) |
| صفات الاختيار الجيد | (5-10) |
| كيفية بناء المقياس أو الاختبار | (6-10) |
| نموذج لبناء المقياس أو الاختبار | (7-10) |
| إعداد مقياس الاتجاه نحو الرياضيات | (8-10) |
| مقياس الاتجاه نحو الرياضيات | (9-10) |
| الاختبارات التحصيلية | (10-10) |
| اختبار التحصيل في الرياضيات | (11-10) |

الفصل العاشر

التقويم Evaluation

(1-10) مقدمة

بعد أن تطورت عمليات التعليم والتعلم أصبح من الصعب استخدام الملاحظة الذاتية من قبل المعلم لتقييم تحصيل التلاميذ لأن الملاحظة لابد أن تسيطر عليها الذاتية أكثر من الموضوعية، ولكي يكون المعلمين موضوعيين في حكمهم وتقويمهم لتلاميذهم كان لابد من وجود أدوات تمكنا من تجميع المعلومات المناسبة (قياس) التي تمكنا من الحكم على هؤلاء التلاميذ (تقويم) من هذه الأدوات الاختبارات.

(2-10) ما المقصود بعملية التقويم

1 - يعرف الدمرداش سرحان التقويم بأنه «تحديد مدى ما بلغناه من نجاح في تحقيق الأهداف التي تسعى إلى تحقيقها بحيث تكون عوناً لنا على تحديد المشكلات وتشخيص الأوضاع ومعرفة العقبات والمعوقات من أجل تحسين العملية التعليمية ورفع مستواها ومساعدتها على تحقيق أهدافها⁽⁹⁾.

2 - يعرف بلوم وزملاءه التقويم على أنه عملية إصدار الحكم على قيمة من القيم لأجل غرض معين أو على مجموعة من الأفكار أو حلول أو طرق أو مواد وغيرها ويتضمن عملية إصدار الحكم استخدام معايير ومستويات للتقييم تحكم على مدى دقة هذه الأمور وهل هي اقتصادية وكافية أم غير ذلك⁽⁵⁴⁾.

3 - ويعرف ماثيوس التقويم بأنه يتضمن الحكم على وتقدير وتقييم وتفسير العملية التربوية كلها وتستخدم عدة أدوات للتقييم منها الملاحظة والبحوث المسحية والسجلات والموتقات وقوائم التقدير وكروت الدرجات وكذلك

الاستبيانات لإعطاء شواهد في ضوء مستويات فهمية وفي سياق المواقف المعينة وأهداف الجماعة أو أهداف الفرد⁽⁷²⁾.

4 - ويعرف الكن Alkin التثويم بأنه عملية التحقق في صحة أبعاد قرار معين أو انتقاء بيانات صالحة وتجميع وتحليل البيانات لأجل إعطاء حكم على قرارات وانتقاء الأصلح منها دون غيرها⁽⁵⁵⁾.

5 - ويعرف ويلي wiley التثويم بأنه يتضمن تجميع البيانات الخاصة بتغير سلوك الطلاب واستخدامها لعمل قرارات تخطيط برنامج تربوي⁽⁷⁸⁾.

والواضح أن هذه التعريفات جميعها تشترك في أن التثويم عملية تجميع للبيانات وتحليلها بطريقة منظمة لكي تحدد مدى ما بلغناه من تحقيق للأهداف التربوية أو لاتخاذ قرارات في ضوء نتائج التحليل.

والتثويم يكون شاملاً بقدر ما تجمع من بيانات (القياس Measurement) وتبلغ جودة هذه البيانات المتجمعة خلال عملية التثويم بقدر ما تكون موضوعية، فعملية القياس هي تكميم مقدار ما يملكه الشخص أو الطالب من سمة فبدل أن نقول أن أحمد متفوق على إبراهيم نقول أن درجة أحمد في الفيزياء 96 ودرجة إبراهيم 65 في نفس المادة.

أو بدل أن نقول أن إسماعيل أطول من خالد يمكن التعبير عن هذه السمة في موضوعية بأن طول إسماعيل 183 سنتيمتراً وطول خالد 156 سنتيمتراً، والجدير بالذكر أنه ليس جميع الأشياء أو السمات أو الصفات يمكن قياسها مباشرة مثل الطول والوزن والتحصيل في امتحان ما فهناك سمات مثل الذكاء والميول والاتجاهات لا يمكن قياسها مترين بل بطرق غير مباشرة.

وكلما كان القياس صادقاً أي كلما كانت الأدوات المطبقة لها درجة عالية من الصدق والثبات كلما اقتربنا من الحكم الصادق على الموضوع وبالتالي فإن عملية اتخاذ القرارات في هذا الموضوع تكون قريبة من الواقع (التثويم).

والسؤال الذي يطرح نفسه : ما الفرق بين القياس Measurement والتقويم Evaluation ؟ للإجابة عن ذلك نقول أن القياس يتضمن جمع البيانات عن الظاهرة أو السمة أو الصفة المراد تقويمها، وهذه البيانات تترجم في درجات رقمية تُعبّر عن أداء وسلوك الطالب المفحوص.

أما التقويم فهو عملية تتضمن القياس وهي العملية التي فيها نفس البيانات المجمعة من عمليات القياس وهي أيضًا العملية التي يتم فيها اتخاذ القرارات.

(10-3) أنماط التقويم

قبل الحديث عن أنماط التقويم لابد من التنكير بأن عملية التقويم الأساسية واحدة بغض النظر عن موضوع التقويم والجدير بالذكر أن عمليات التقويم الأساسية تدرج تحت :

- أ - تحديد الأهداف.
- ب - اختيار أدوات القياس.
- ج - تخطيط استراتيجيات تحقيق الهدف.
- د - إجراءات العملية والنتائج.
- هـ - تحليل النتائج وتفسيرها.

ولكننا نجد الاختلاف في نماذج أو أنماط التقويم ومن أنماط التقويم المشهورة :

1 - تقويم التلميذ

فالتلميذ محور العملية التعليمية يتم تقويمه في مجالات عديدة منها الاستعداد الدراسي والاستعداد العقلي والذكاء والشخصية والتحصيل الدراسي وتقويم ميوله واتجاهاته نحو الدراسة، وهذه السمات يتم قياسها عن طريق الاختبارات أو المقاييس التي يضعها المعلم أو الباحث التربوي وعملية تقويم

التلم يذ يجب أن تغطي جميع الجوانب المعرفية والعاطفية والمهارية بحيث لا تركز على جانب على حساب الجانب الآخر.

الـ
و

2 - تقويم المنهج

المعلوم أن المنهج مفهوم شامل للأهداف التربوية والأهداف الخاصة والمحتوى الدراسي الذي يقدم للتلاميذ ويكون مترجماً في الكتاب المدرسي، ويتضمن المنهج أيضاً الأنشطة المدرسية والوسائل التعليمية وأوجه النشاط في المختبرات والمعامل والرحلات المدرسية والنوادي العلمية في المدارس كل هذه تحتاج إلى عمليات تقويم.

ق

3 - تقويم المدرسة

لكل مدرسة برنامجها التعليمي التربوي الخاص بها فهي بما تتضمنه من حبرات للدراسة معامل ومكتبة وأماكن للنشاطات الرياضية والمسرحية والمراسم والنشاطات الطلابية والجدول الدراسي ومواعيد الحضور والانصراف ومواعيد الامتحانات الشهرية والفصلية هذا المناخ المدرسي له تأثيره الإيجابي وقد يكون له تأثيراً سلبياً على بعض الطلاب، لذلك لابد من التحقق من مدى تحقيق الأهداف المتوخاة من وظيفة هذا المناخ المدرسي، لذلك لابد من الحاجة إلى تقويم المدرسة.

4 - تقويم المؤسسة التعليمية

تشمل المؤسسة التعليمية القائمين على التعليم من أمين التعليم ومديري الإدارات والموجهين والمفتشين والإداريين وأصحاب اتخاذ القرار في المؤسسة التعليمية، فهذه الفئة بحاجة إلى أن تقوم نتائج أعمالها والتي تنعكس على المنتج التعليمي في المؤسسة التعليمية بعامة، فزيادة الفاقد التعليمي مثلاً وكثرة تسرب الطلاب ونسب الرسوب الكبيرة في المدارس قد يكون سببها القرارات العليا أو عدم المراقبة على المنفذين للخطط التعليمية إذن لابد من القيام بعمليات التقويم المناسبة لهذه المؤسسة التعليمية.

5 - تقويم المعلم

المعلم أولاً وقبل كل شيء إنسان والإنسان يخطئ أو يصيب والأشخاص يتفاوتون في أدائهم من جميع النواحي، فهناك المدرس الكفاء والمدرس الملتزم والمدرس الكسول والمدرس الذي يحاول أن يبذل جهداً والمدرس قليل الخبرة، ويمكن التعرف على هذه النوعيات من المدرسين عن طريق عمليات التقويم والتي من بينها نتائج الطلاب فإذا أظهرت نتائج فصل (صف) معين من المتفوقين أن نتائج هؤلاء الطلاب في أحد المقررات الدراسية دون المستوى المطلوب أو المتوقع فقد تؤدي نتائج القياس إلى أن المعلم لهذا المقرر أحد أسباب هذا التدني لذلك لابد من تقويم المعلم من قبيل :

- 1 - هل يبذل المعلم جهداً واضحاً مع طلابه ؟
- 2 - هل يقدم أفكاراً جديدة تتناسب مع مستويات هؤلاء الطلاب ؟
- 3 - هل يتابع المعلم طلابه من خلال الاختبارات التكوينية والتجميعية ؟
- 4 - هل يحرص المعلم على تنويع طرائق تدريسه ؟
- 5 - هل يحرص المعلم على تنمية اتجاهات موجبة نحو المادة الدراسية ؟

هذه الأمور وغيرها تجعل الحاجة إلى تقويم المعلم.

6 - تقويم أداء الطلاب

تهدف العملية التعليمية إلى تعديل سلوك الطلاب ويتم ذلك من خلال عمليات مخطط لها من قبل المؤسسات التربوية والتعليمية وتتميز هذه العمليات بوضوح الأهداف الموضوعية ويمكن تحقيق هذه الأهداف عن طريق المؤسسات التعليمية خاصة المدرسة حيث يقوم المدرس بمهمة واضحة وصريحة في هذا المجال حيث أن محصلة عمليات التدريس والمتابعة والتقويم التي يقوم بها المعلم

خلال المراحل الدراسية المعلم يكون متغيراً في أداء المعلم وسنذكره ومن ثم تحقيق الكثير من أهداف التربية.

والمعلم أثناء قيامه بمهام التدريس مسئول عنه أن يقوم بالاضطلاع على سلامة سيره في التعلم أو الخطأ التدريسية وهل حقق الأهداف المرجوة من درسه أو الوحدة التي درسها أو محتوى المنهج الذي قام بتدريسه ؟ وهل هو راض عن مستوى أداء تلاميذه ؟ هل هو راض عن أداء كمعلم ؟.

لذلك يقوم المعلم بإعداد أدوات (وسائل) تقييمية بغرض التقييم ومن ثم علاج العملية التدريسية التي يقوم بها المعلم.

(4-10) أدوات التقييم

عندما يريد المعلم أن يقوم أثناء ضلوه فيه بنجاح في استخدام أدوات أو وسائل لعملية التقييم هذه منها :

- 1 - ملاحظة Observation
- 2 - المقابلة Interview
- 3 - مقاييس الاتجاه Attitude Measurements
- 4 - مقاييس الميول Interests Measurements
- 5 - مقاييس التحصيل الدراسي Achievement Measurements
- 6 - اختبارات الاستعداد Aptitude tests
- 7 - اختبارات الذكاء Intelligence tests

ولكن يراعى أنه قبل أن يستخدم المعلم من هذه الاختبارات أو المقاييس يجب أن يكون حدد أهدافه من عملية التقييم لكي تسهل عليه عملية اختيار الأداة أو الوسيلة التقييمية.

والجدير بالذكر أن هذه الاختبارات أو المقاييس في مجموعها تقيس الجوانب المعرفية والعاطفية والانفعالية وكذلك الجوانب النفس حركية أو المهارية لدى المتعلمين.

وفي مدارسنا يقتصر المعلمين في تقويمهم على الجانب (المجال) المعرفي وأحياناً ما تشمل الجانب المهاري (النفس حركي).

وعملية إعداد الاختبارات ليست سهلة فهي تحتاج إلى مجهود كبير لذلك نجد القدرة على إعداد الاختبار الجيد تميز المعلم الكفاء عن المعلم العادي فالاختبار ليس مجرد وضع مجموعة من الأسئلة التي تغطي بعض أو أغلب جوانب المادة العلمية المقدمة للتلاميذ بل هناك مجموعة من المعايير أو الصفات التي تحدد الاختبار الجيد.

(5-10) صفات الاختبار الجيد

1 - الصدق Validity

ويقصد بذلك أن الاختبار يكون صادقاً إذا كان يقيس فعلاً ما وضع من أجل قياسه⁽¹²⁾، فمثلاً إذا كان الاختبار يقيس التحصيل في الرياضيات في مادة الجبر ووجدنا أن الاختبار يحتوي على مجموعة كبيرة من الأسئلة التي تقيس الذكاء أو الاتجاه فهذا الاختبار لا يعتبر صادقاً إذ لا بد أن يحتوي الاختبار جميعه على أسئلة خاصة بمادة الجبر.

ومثال آخر إذا كان الاختبار لقياس مهارة التحويل من الصورة اللفظية للمسألة إلى الصورة الرمزية ووجدنا أن الاختبار يحتوي على مسائل تقيس مهارة الرسم أو مسائل تقيس المهارة في إجراء العمليات الحسابية فإن هذا الاختبار لا يكون صادقاً.

2 - الثبات Reliability

يقصد بالثبات للاختبار أنه يعطي نفس النتائج إذا ما استخدم الاختبار أكثر من مرة تحت ظروف مماثلة⁽¹²⁾.

بمعنى أن وضع الفرد أو ترتيبه لمجموعته (أقرانه من التلاميذ الذين طبق عليهم الاختبار) لا يتغير جوهرياً إذا ما أعيد تطبيق الاختبار عليه تحت ظروف واحدة

وأن نتائج إعادة التطبيق تحمل صفة الاستقرار على أن تكون الفترة ما بين التطبيق الأول والتطبيق الثاني في حدود أسبوعين أو ثلاث على الأقل لتلافي احتمالات حفظ الأسئلة.

3 - التمييز Discrimination

يتصف الاختبار بالقدرة التمييزية Discriminating power أي قدرته على فرز الطلاب إلى مستويات مختلفة⁽³⁹⁾ بمعنى أن لا نجد أن جميع الطلاب ممتازون في الاختبار أو أن جميعهم يحصلون على درجات منخفضة في هذا الاختبار.

4 - الموضوعية Objectivity

ويقصد بذلك عدم اختلاف المصححين في تقدير الإجابات على أسئلة الاختبار من جهة، ومن جهة أخرى يشير «فان دالين» إلى أن المقياس يكون موضوعًا إذا كان يعطي نفس الدرجة بغض النظر عن صححه وكذلك يكون موضوعيًا عندما تتال فيه الإجابات التي تتساوى في دقتها على نفس التقدير⁽¹⁶⁾.

5 - الشمولية Comprehensive

ويقصد بشمول الاختبار (الاختبار شامل) تغطية مفرداته لمعظم الموضوعات التي تم تدريسها للطلاب وبذلك نتفادي أثر التخمين لدى بعض الطلاب الذين يركزون في دراستهم على مجموعة من المواضيع وليس جميعها.

6 - مناسبة زمن الاختبار

يجب أن يكون الزمن المحدد للاختبار مناسبًا فإذا كان الزمن المناسب للاختبار ساعة فلا يجب أن يعطى الطلاب أكثر من ذلك أو أقل.

أنواع الاختبارات

Attitude Tests

1 - اختبارات الاتجاه

Interest Tests

2 - اختبارات الميول

Intelligence Tests	3 - اختبارات الذكاء
Aptitude Tests	4 - اختبارات الاستعداد
Significant Tests	5 - اختبارات الدلالة
Mental Ability Tests	6 - اختبارات القدرة العقلية
Coordination Tests	7 - اختبارات التوافق
Achievement Tests	8 - اختبارات التحصيل
Classification Tests	9 - اختبارات التصنيف
Completion Tests	10 - اختبارات التكملة

(6-10) كيفية بناء الاختبار أو المقياس

لبناء الاختبار أو المقياس يمكن اتباع الخطوات التالية :

- أ - تحديد الهدف من الاختبار أو المقياس.
- ب - تحديد محاور (مركبات) الاختبار (المقياس).
- ج - كيفية الحصول على معلومات بنود المقياس.
- د - صياغة مفردات الاختبار (المقياس).
- هـ - تعميم نظام لتقدير الدرجات.
- و - موضوعية المقياس (الاختبار).
- ز - تحديد صدق المقياس (الاختبار).
- ح - حساب ثبات المقياس (الاختبار).
- ط - المقياس في صورته النهائية.

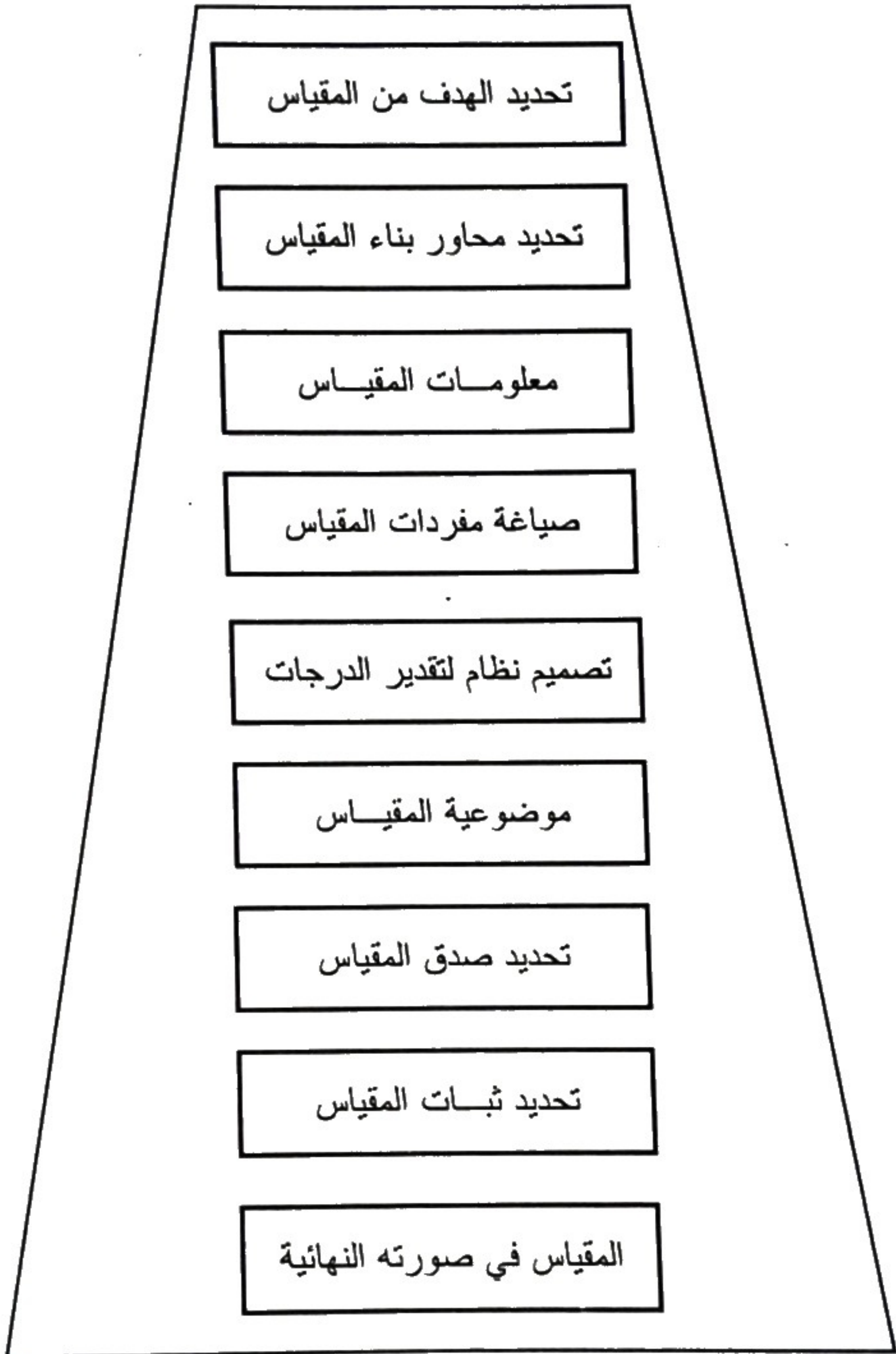
والشكل التالي يوضح خطوات إعداد المقياس (الاختبار).

(7-10) نموذج لبناء مقياس

إعداد مقياس الاتجاه نحو الرياضيات

نظراً لأهمية قياس الاتجاه نحو الرياضيات للمعلم أثناء قيامه بعملية التدريس حيث يستطيع المعلم عن طريق تطبيقه تصنيف طلابه إلى طلاب ذوي اتجاهات موجبة نحو الرياضيات وإلى طلاب ذوي اتجاهات سالبة نحوها، وبالتالي فهو يضع الخطط والاستراتيجيات التي تساعد على تنمية الاتجاهات الموجبة نحو الرياضيات لذوي الاتجاهات السالبة وبالتالي تحقيق الأهداف التربوية.

لذلك سنقدم نموذجاً لكيفية إعداد مقياس الاتجاه نحو الرياضيات كي يستفيد منه المعلم كوسيلة تربوية من جهة، ومن جهة أخرى يستفيد من هذه الخبرة في بناء مقاييس الميول أو القلق أو غيرها مثل الاختبارات التحصيلية.



خطوات إعداد المقياس (الاختبار)

(8-10) إعداد مقياس الاتجاه نحو الرياضيات

خطوات إعداد المقياس

أ - الهدف من المقياس

يهدف هذا المقياس إلى قياس اتجاه طلاب المرحلة الثانوية من التعليم العام نحو الرياضيات في ضوء مصطلح الاتجاه الذي التزم به الباحث وهو تعريف أحمد زكي صالح وهو⁽⁶⁾:
«مجموع استجابات القبول أو الرفض التي تتعلق بموضوع جدلي معين تلك الاستجابات توصف بأنها متعلمة، مستمرة، ذات قوة تنبؤية تنمو نحو الانتشار وفي اتجاه واحد».

والتعريف الإجرائي للاتجاه نحو الرياضيات :

«مجموع الدرجات التي يحصل عليها الطالب على مقياس الاتجاه نحو الرياضيات».

ب - تحديد محاور (مركبات) المقياس

يختف الباحثون في تحديد محاور المقياس كل حسب الجانب الذي ينوي قياسه وكذلك هدفه من المقياس، وماذا يريد أن يقيس، فمثلاً نجد البعض يعتبر الاتجاه مكون من أربعة جوانب هي :

- 1 - جانب الاهتمام بالرياضيات
- 2 - جانب الاستمتاع بالرياضيات
- 3 - جانب الثقة في الرياضيات
- 4 - جانب التصورات الذاتية

ويرى البعض الآخر أن الاتجاه مكون من خمس جوانب هي⁽³¹⁾:

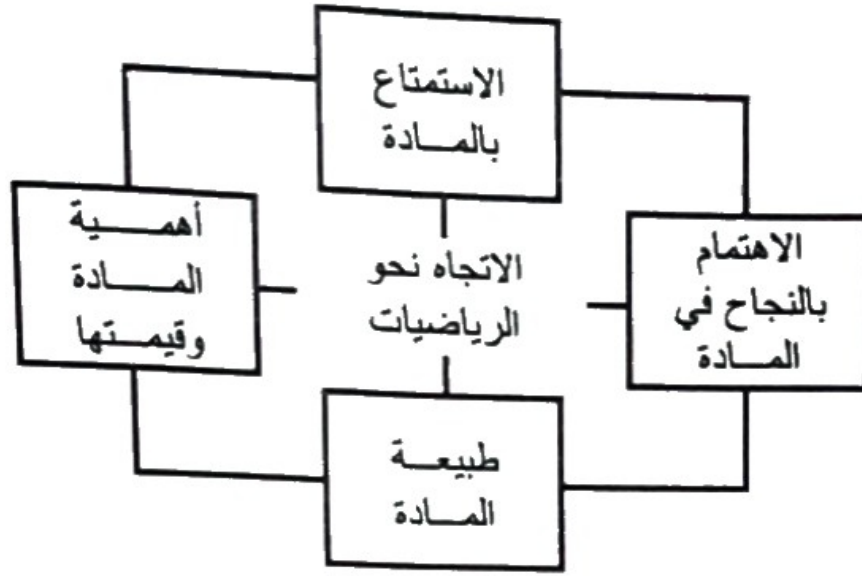
- 1 - جانب الاستمتاع بالرياضيات
- 2 - جانب قيمة المادة
- 3 - جانب طبيعة المادة
- 4 - جانب تعلم المادة.
- 5 - جانب الاتجاه نحو معلم الرياضيات.

من ذلك نجد أنه متى تحددت مكونات الاتجاه فإنه بالتالي نستطيع عمل إطار للمقياس الخاص بالاتجاهات علمًا أنه ينبغي أن نحدد من الذي نقيس اتجاهه، هل هو التلميذ ؟ أو المعلم ؟ أو الأقارب أو غيرهم ؟ هل يقيس الاتجاه نحو المادة كعلم يدرس ؟ أو كمادة دراسية ؟ هل يقيس الاتجاه نحو المادة ككل ؟ أو فروع المادة ؟ هل يراد قياس الاتجاه نحو المادة من خلال مميزات وخصائص أو طبيعة المادة أو قيمتها ؟.

في ضوء ذلك نتحدد محاور ومكونات المقياس وهي :

- 1 - جانب الاهتمام بالنجاح في المادة : الاستجابة هنا تظهر في اهتمام الطالب بالفوز بالمراكز الأولى في مادة الرياضيات.
- 2 - جانب أهمية المادة وقيمتها : وتعكس الاستجابات لهذا الجانب أهمية الرياضيات وقيمتها في الحياة الخاصة والعامة.
- 3 - جانب الاستمتاع بالمادة : وهنا تظهر الاستجابة شعور الفرد بالسعادة أو الارتياح، أو الشعور بالضيق نتيجة لدراسة الرياضيات.
- 4 - جانب طبيعة المادة : وتعكس استجابة الطالب نحو المادة من حيث سهولتها أو صعوبتها.

والشكل التالي يوضح مكونات مقياس الاتجاه نحو الرياضيات.



الجوانب المكونة لمقياس الاتجاه نحو الرياضيات

ج - كيفية الحصول على معلومات بنود المقياس

بعد الاطلاع على مجموعة من مقاييس الاتجاهات نحو الرياضيات مثل:

- مقياس داتون (1972) Dutton Attitude Scale

- مقياس أنتونن (1976)

Aitonen's Version of the Semantic Differential

- مقياس ايكن (1970، 1976) Aiken Math Attitude Scale

- مقياس ميناتو (1981) Minato's Version of the Semantic

- مقياس الاتجاه نحو الرياضيات من إعداد ممدوح سليمان وفاروق عبد السلام (1982).

- مقياس الاتجاه نحو الرياضيات من إعداد شكري سيد أحمد (1985).

- مقياس الاتجاه نحو الرياضيات من إعداد محمد عيد عوض الله (1986).

وغيرها من المقاييس العديدة المستخدمة في قياس الاتجاهات بصورة عامة،

وجميع هذه المقاييس تختلف في مكوناتها، وكذلك في درجة الصنق والثبات.

ولقد تم الاستفادة من هذه المقاييس في اختيار بنود المقياس وكذلك في الجمل المستخدمة في صياغة هذه البنود، وكذلك في تحديد عدد العناصر أو البنود المناسبة لعمل مقياس الاتجاه نحو الرياضيات بحيث يتكامل عدد البنود مع عدد المحاور.

د - صياغة المفردات للمقياس وتنقيحها في ضوء آراء المحكمين

بعد الاطلاع على مجموعة المقاييس السابقة وبعد تحديد الهدف من المقياس، وكذلك تحديد المحاور تم وضع مجموعة من الفقرات حددت بخمسة عشر بنداً موزعة على المحاور الأربعة السابقة الذكر. تم عرض هذه البنود في استبانة خاصة قدمت إلى مجموعة من الأساتذة في علم النفس والمناهج وطرق تدريس الرياضيات في جامعة عين شمس وطنطا وجامعة قطر وجامعة المنوفية حيث تم إبداء الرأي في مدى ملائمة البنود لمقياس الاتجاه نحو الرياضيات، وكذلك صلاحية الجملة أو العبارة، ولقد تم إضافة ما مجموعه خمسة بنود من قبل المحكمين ليصبح عدد بنود المقياس عشرين بنداً.

هـ - تصميم نظام لتقدير الدرجات

اتبع في تقدير درجات المقياس نموذج ليكرت ذي النقاط الأربع (موافق بشدة - موافق - غير موافق - غير موافق بشدة) بحيث توزع الدرجات في حالة الاستجابة الموجبة (4 - 3 - 2 - 1)، وفي حالة الاستجابة السلبية (1 - 2 - 3 - 4) وتكون الدرجة الكلية للمفحوص مجموع القيم المعطاة لكل البنود التي أجابت عليها المفحوص.

و - موضوعية المقياس

المقياس الحالي يعتبر موضوعياً لأن طريقة تصحيحه واضحة فكل استجابة محددة بدرجة معينة، وأن الدرجة الكلية للطالب هي مجموع الدرجات

المعطاة لكل بند ولا يدخل في ذلك تأثير الشخص المصحح عند تصحيح المقياس.

ز - صدق المقياس

للتحقق من صدق الأداة تم عرض عبارات المقياس على السادة المحكمين من المختصين في علم النفس وطرق تدريس الرياضيات وطلب منهم الباحث إبداء الرأي حول :

- مدى صلاحية العبارات لقياس الاتجاه نحو الرياضيات.

- مدى مناسبة العبارة لقياس ما وضعت لأجله.

- العبارات التي تحتاج إلى إعادة صياغة أو تعديل.

ولقد تفضل السادة الأساتذة المحكمون بالإشارة إلى تعديل بعض العبارات التي تم إعادة صياغتها، ولقد أقر المحكمون بأن الأداة صالحة لقياس الاتجاه نحو الرياضيات.

كذلك قام الباحث بحساب صدق المقارنة الطرفية لمستوى استجابات الطلاب ذوي الاتجاه الموجب مع متوسط استجابات الطلاب ذوي الاتجاه السالب وتم حساب دلالة الفروق بين هذين المتوسطين حيث بلغت قيمة «ت» للفروق بين استجابات المجموعتين (30) وهذه القيمة دالة إحصائيًا عند مستوى «0.01» مما يدل على قدرة الأداة على التمييز.

ح - ثبات المقياس

حسب ثبات مقياس الاتجاه نحو الرياضيات باستخدام طريقة إعادة التطبيق على مجموعة من طلاب الصف الأول الثانوي وعددهم سبعون طالبًا اختيروا عشوائيًا من مدارس ثلاث في قطر، ولقد أعيد تطبيق الاختبار عليهم بعد عشرين يومًا وذلك لتلافي عامل الألفة مع الأسئلة أو حفظها. ولقد بلغت قيمة معامل الثبات لهذه الطريقة (0.866) وهو معامل مرتفع تزيد قيمة دلالة

الإحصائية عن مستوى «0.01» مما يطمئن إلى ثبات الأداة.

ط - المقياس في صورته النهائية

لقد أصبح المقياس في صورته النهائية التي طبقت على أفراد على العينة الاستطلاعية لحساب ثباته مكوناً من عشرين بنداً تقيس في مجموعها المركبات الأربعة المحددة سابقاً للاتجاه نحو الرياضيات. والجدول () يوضح توزيع بنود المقياس على مركبات الاتجاه نحو الرياضيات.

جدول ()

توزيع بنود مقياس الاتجاه نحو الرياضيات على مركباته

م	مركبات الاتجاه نحو الرياضيات	أرقام العبارات الدالة	العدد الكلي	النسبة المئوية
1	الاستمتاع بالمادة	2، 5، 7، 12، 19	5	25%
2	الاهتمام بالنجاح في المادة	1، 3، 4، 8، 13	5	25%
3	طبيعة المادة	6، 10، 11، 14، 20	5	25%
4	أهمية المادة وقيمتها	9، 15، 16، 17، 18	5	25%
	المجموع		20	

مقياس الاتجاه نحو الرياضيات

Attitude Towards Mathematics Scale

مقياس الاتجاه نحو الرياضيات

(9-10)

بيانات أولية :

الاسم : الصف : السن :

عزيزي الطالب /

يُعتبر تكوين اتجاهات موجبة نحو دراسة الرياضيات هدف من الأهداف المستوخاة من تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية، لذلك قام الباحث ببناء هذا المقياس لقياس الاتجاه نحو الرياضيات لدى طلاب المرحلة الثانوية، ويتكون هذا المقياس من 30 عبارة تقيس في مجموعها الاتجاه نحو الرياضيات.

والمطلوب منك عزيزي الطالب أن تضع علامة (✓) أمام كل عبارة في العمود الذي يمثل درجة موافقتك.

فإذا كنت موافقاً بشدة على العبارة فضع علامة (✓) في العمود موافق بشدة.

وإذا كنت موافقاً فضع نفس العلامة (✓) في العمود موافق.

وإذا كنت غير متأكد من إجابتك بمعنى أنك لا تستطيع أن تقبل العبارة أو ترفضها فضع (✓) أمام العبارة في العمود غير متأكد.

وإذا كنت غير موافق أو ترفض العبارة فضع (✓) في العمود غير موافق.

وإذا كنت غير موافق أبداً أو ترفض تماماً العبارة فضع (✓) أيضاً في العمود غير موافق أبداً.

وتأكد عزيزي الطالب أنه لا توجد إجابة صائبة أو إجابة خاطئة وإنما المطلوب درجة موافقتك على العبارة.

كذلك لا تترك أي عبارة دون إجابة، وتأكد من أن إجابتك بهدف الاستفادة فقط في أغراض البحث العلمي بما يعود عليك وعلى زملائك بالنفع والفائدة.

شاكرين لكم حسن تعاونكم.. والله الموفق،،

الباحث

مقياس الاتجاه نحو الرياضيات

بيانات أولية :

الاسم : السنة الدراسية :

العبارة	موافق جدًا	موافق	غير متأكد	غير موافق	غير موافق أبدًا
1 - يسعدني أن أعرف بأنني طالب ممتاز في الرياضيات.					
2 - أدرس كثيرًا لكي أحصل على أعلى الدرجات في الرياضيات.					
3 - أفضل أن يعتقد الناس أنني ذكي في الرياضيات.					
4 - يسرني أن يكون ترتيب الأول بين المتنافسين في مسابقات الرياضيات.					
5 - الرياضيات أسوأ مادة درستها في حياتي لحصولي دائمًا على درجات منخفضة فيها.					
6 - مهما درست من رياضيات فلا يمكن الحصول على درجات مرتفعة فيها.					
7 - أعتقد أن دراسة الرياضيات في المستوى الجامعي أصعب منها في الثانوي.					
8 - أتصور أنني لا أستطيع دراسة الرياضيات في المستوى الجامعي.					

غير موافق أبداً	غير موافق	غير متأكد	موافق	موافق جداً	العبارة
					9 - الرياضيات بطبيعتها تساعد على تنمية القدرة على التفكير.
					10 - تحتوي الرياضيات على مواضيع كثيرة صعبة.
					11 - لا يوجد ارتباط بين فروع الرياضيات المختلفة مثل الجبر والهندسة والحساب.
					12 - الرياضيات مادة معقدة.
					13 - لا يوجد استخدامات للرياضيات خارج الفصل المدرسي.
					14 - الرياضيات ليست مهمة في حياتنا اليومية.
					15 - الرياضيات مادة عقيمة ولا أهمية لها في الحياة العملية.
					16 - لا أشعر أن الرياضيات تساهم في تقدم المجتمع.
					17 - يرجع الفضل إلى الرياضيات في معظم الاكتشافات العلمية.
					18 - دراسة الرياضيات تساعد الفرد على حل كثير من مشكلاته.
					19 - مادة الرياضيات من المواد الدراسية المحببة في الحياة.

غير موافق أبداً	غير موافق	غير متأكد	موافق	موافق جداً	العبارة
					20 - أستمتع دائماً بدراسة مادة الرياضيات.
					21 - لا أشعر بمرور الوقت في حصص الرياضيات.
					22 - دراسة الرياضيات تسبب لي عدم الارتياح.
					23 - الرياضيات مادة ثقيلة على النفس، لذلك أكره دراستها.
					24 - دراسة الرياضيات من المواد المثيرة والشيقة لي.
					25 - دراسة الرياضيات تجعلني أشعر بعدم الصبر والاستقرار.
					26 - يتوقف عقلي على التفكير عندما تعترضني مشكلة رياضيات.
					27 - يضطرب تفكيري حين أضطر إلى استخدام الرياضيات في مواقف الحياة.
					28 - ينتابني شعور بالخوف عند تقديم امتحانات الرياضيات.
					29 - أشعر بخوف شديد عندما أخطئ في حل مسألة رياضيات.
					30 - أشعر دائماً بالتوتر عند استخدام الرياضيات لحل مشاكل اليومية.

(10-10) الاختبارات التحصيلية

يقصد بالاختبارات التحصيلية تلك الاختبارات أو المقاييس التي تقيس التحصيل المعرفي (معلومات - مبادئ - قوانين - تعميمات - نظريات - حلول مسائل - استنتاجات - براهين) والتي يكون الطالب قد درسها خلال فترة زمنية محددة.

وتقسم الاختبارات التحصيلية إلى :

أولاً : الاختبارات الشفوية Oral Tests

تتم الاختبارات الشفوية عن طريق قياس المعلم بسؤال التلاميذ مجموعة من الأسئلة شفاهة ويقوم التلميذ بالإجابة عنها دون استخدام الورقة والقلم وأحياناً يمكن للتلميذ أن يوضح إجابته على السبورة إذا كانت الإجابة تحتاج إلى الرسم أو التوضيح ويعمل المعلم على تعزيز الإجابات الصائبة وتصحيح الإجابات الخاطئة وبالتالي يمكن لباقي التلاميذ التعلم من أخطاء زملائهم وكذلك من خلال تصحيح المعلم للاستجابات الخاطئة.

وهذه الاختبارات تعطي المعلم تغذية راجعة عن مستوى تلاميذه وتشجع بعض التلاميذ على الحديث أمام زملائهم بطلاقة وفاعلية، ويعاب على هذه الطريقة أن الأسئلة للتلاميذ لا تكون متكافئة وتتدخل فيها ذاتية المعلم على حسب معرفته بمستوى التلميذ، كذلك فإن صيغة هذه الأسئلة غالباً ما لا تكون دقيقة وكذلك الإجابات.

كما أن كثيراً من المتعلمين من التلاميذ الخجولين لا يستطيعون الاستجابة كاملة نظراً لتخوفهم من الإجابة المباشرة أمام التلميذ لكن لو تركت لهم الفرصة لاستخدام الورقة والقلم لعبروا عن إجاباتهم بطريقة أفضل بكثير، ولكن يمكن للمعلم أن يشجعهم في ذلك، ويبعدهم عن حالات الخجل هذه.

ويمكن للمعلم أن يكون عادلاً في أسئلته إذا وضع مجموعة من الأسئلة

المتكافئة والمكتوبة في ورق منفصل ويسحب السؤال عشوائيًا لكل تلميذ.

ثانيًا : الاختبارات التحريرية Paper - Pencil tests

وهذه الاختبارات يستخدم فيها الورقة والقلم ويمكن تقسيمها إلى :

أ - اختبارات المقال Essay tests

تتميز اختبارات المقال بسهولة وضعها من جانب المعلم ويغلب استخدامها في مدارسنا لأنها لا تحتاج إلى وقت في صياغتها ولكن يعاب عليها عدم شموليتها لجميع أجزاء المنهج (المحتوى).

وقد تتميز أسئلة هذه الاختبارات بالصعوبة أو بالسهولة، لذلك فإن هذه الأسئلة لا تقيس قدرة التلميذ على التفكير أو الابتكار بل تركز دائمًا على الحفظ والاستظهار، كذلك فإن الدرجات المقدرة على الأسئلة تكون غير دقيقة لأن ذاتية المعلم تتدخل في ذلك وهذه قد ينتج عنها أحيانًا مشاكل بين الطلبة والمعلمين فعندما يطلع التلميذ على إجابة زميله الذي بجانبه ويكتشف أن إجابته مطابقة لإجابة زميله مع اختلاف درجته عن درجة زميله على هذا السؤال، هنا يلجأ التلميذ إلى مراجعة المعلم، وقد ينتج عنها عدم ثقة التلميذ بالمعلم.

أمثلة لأسئلة المقال :

- 1 - اكتب ما تعرفه عن فضل العرب والمسلمين في مجال الجبر والهندسة.
- 2 - حل المعادلة التربيعية $x^2 - 8x + 12 = 0$ بأكثر من طريقة.
- 3 - اكتب مفهوم البرهان الرياضي واذكر أنواعه مع التوضيح بالأمثلة.
- 4 - أثبت أن النظام (ح ، + ، ×) يمثل حقلًا، حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية، + ، × عمليتي الجمع والضرب العاديتين.

ب - الاختبارات الموضوعية Objective tests

تتميز هذه الاختبارات بأن نتائجها لا تتدخل فيها ذاتية المعلم وأن هذه الاختبارات يمكن أن تغطي أغلب أجزاء المحتوى للمنهج وكذلك سهولة

تصحيحها وأنها تقيس قدرة التلميذ على التفكير، كذلك فهذه الأسئلة تعتمد على السرعة في الحل والدقة في الإجابة.

كذلك يستطيع التلميذ بعد تصحيحها من التأكد من الخطأ الذي وقع فيه، ويعاب على هذه النوعية من الاختبارات أنها تحتاج إلى وقت طويل في إعدادها ومجهود أكبر وخلفية علمية جيدة من المعلم، كذلك فإن هذه النوعية من الاختبارات تتيح الفرصة للتخمين عندما يكون التلميذ غير متأكد من إجابته.

أمثلة لهذا النوع من الاختبارات

1 - اختبار الاختيار من متعدد Multiple choice test

يطلب من التلميذ أن يختار الإجابة الصحيحة من عدة استجابات (بدائل) متقاربة، وغالبًا ما يكون عدد هذه البدائل ثلاثة أو أربعة أو خمسة ويفضل الاختيار من أربعة وغالبًا ما يكون أحد هذه البدائل سهلاً وآخر عاديًا يمكن تحييدها بسهولة وهناك البديل المحير حيث يميز هذا التلميذ المتأكد من إجابته من التلميذ غير المتأكد من إجابته.

أمثلة :

ضع علامة (✓) أمام الإجابة الصائبة :

أ - إذا كانت $a * b = a^2 + b^2 - ab$ فإن :

3 - 5 تساوي :

1 - () 31

2 - () 19

3 - () 49

4 - () 1

ب - الوسط الحسابي لمجموعة الدرجات 9 ، 10 ، 8 ، 9 ، 9 ، 11 هو :

1 - () 8

2 - () 9

3 - () 54

4 - () 8.5

ج - إذا قطع مستوى مائل سطح مخروط قائم، فالمقطع هو :

1 - () دائرة

2 - () قطع ناقص

3 - () قطع مكافئ

4 - () قطع زائد

2 - اختبار الصواب والخطأ True - False test

وفيها يطلب من المستجيب أن يضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (x) أمام العبارة الخاطئة ولا يسمح للتلميذ بوضع علامتين معاً وأحياناً تستخدم كلمتي نعم أو لا أو موافق وغير موافق.

أمثلة :

ضع علامة (✓) أمام الإجابة الصحيحة وعلامة (x) أمام العبارة

الخاطئة :

أ - إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة s فإن الدالة تكون متصلة عند هذه النقطة. ()

ب - إذا كان : $\frac{3s+1}{5} = \frac{s-7}{2}$ ()

()

فإن $s = 3$

()

ج - $(A \wedge B) = A \vee B$ ()

3 - اختبارات المزاوجة Matching tests

وفيها يعطى التلميذ مجموعتان (قائمتان) من العبارات في عمودين يكون أحدهما يمثل بداية الجملة والعمود الآخر يمثل تكملة الجملة أو الجملة المرتبطة بها، ويشترط أن يكون عدد الجمل في العمودين غير متساوٍ حتى لا تترك

الفرصة للتخمين في الإجابات الأخيرة.

مثال :

فيما يلي مجموعتان أ ، ب والمطلوب التوصيل بخطوط بين جمل المجموعة أ وما يناسبها في المجموعة ب :

« أ »	« ب »
$s^2 - ص^2 =$	$(s - ص)^2$
$s^5 \times ص^3 =$	$s^2 - ص^2$
$= 125s^3$	$s - ص$
$= (s - ص)(s + ص)$	$(s + ص)(s - ص)$
$= 2s^2 + ص^2 = 2s^2 + ص^2$	s^8
$= (s + 8ص)$	$s + 8ص$
	$5 +$
	$s + 7ص$

4 - اختبار التكميل Completion test

يعطى التلميذ المستجيب مجموعة من العبارات الناقصة والتي تستكمل إجابتها بكلمة أو جملة ويطلب من التلميذ إكمال الجملة.

مثال :

أولاً : أكمل باستخدام الرمز $\neq, =, \subset, \supset, \cap, \cup, \emptyset$:

$\{6, 5, 3\} \dots \{5, 4, 3, 2, 1\}$

$9 - \dots \{999\}$

$\{أ, ب, ج, د\} \dots \{د, ب, أ, ج\}$

ثانياً : أكمل ما يأتي :

1 - مجموع زوايا المثلث الداخلة تساوي ...

- 2 - المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى بحيث تكون دائماً على بعد ثابت من محور السينات هو ...
- 3 - مجموعة الحل للمعادلة $s + a = b$ هو ...
- 4 - إذا كان مميز المعادلة $as^2 + bs + c = 0$ سالباً فإن مجموعة الحل ...

وبعد فالمعلم الجيد هو الذي يستطيع أن يعد اختباراتَه بنفسه وبمهارة وكفاءة، وفيما يلي نموذج لاختبار تحصيلي مقنن أي له درجة عالية من الصدق والثبات لكي يستعين به معلم الرياضيات عند إعداد اختباراتَه التحصيلية.

وسنقدم نموذجاً لاختباراً تحصيلياً في الرياضيات لمستوى طلبة الصف الأول الثانوي كي يستفيد منه معلمي هذه المرحلة.

اختبار التحصيل في الرياضيات

Mathematical Achievement Test

لطلاب الصف الأول من المرحلة الثانوية

المنطق الرياضي

ضع علامة (✓) أمام الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الأربع المذكورة في الأسئلة من (1) إلى (9) «لا تترك أي سؤال بدون إجابة»:

السؤال الأول :

أي العبارات التالية تمثل قضية منطقية :

أ - $(\quad)$ $2س + 5 + س$

ب - $(\quad)$ $ص^2 = 9$

ج - $(\quad)$ $17 = 9 + 3$

د - $(\quad)$ $11 \geq 3 + 2ل$

السؤال الثاني :

الجملة $(1 < 4) \vee (2 > 5)$

أ - $(\quad)$ ليست قضية

ب - $(\quad)$ قضية مفتوحة

ج - $(\quad)$ قضية مركبة

د - $(\quad)$ قضية بسيطة

السؤال الثالث :

القضية الصائبة $(ب \leftarrow ج) \wedge (ج \leftarrow ب)$ يعبر عنها :

أ - $(\quad)$ $ب \leftarrow ج$

ب - $(\quad)$ $ج \leftrightarrow ب$

ج - $(\quad)$ $ب \wedge ج$

د - $(\quad)$ $ج \leftarrow ب$

السؤال الرابع :

* _____

$\forall$ س $\exists$ ط : س + 2 < 3 تكافئ :

أ - $\forall$ س $\exists$ ط : س + 2 $\geq$ 3 ()

ب - $\exists$ س $\exists$ ط : س + 2 < 1 ()

ج - $\forall$ س $\exists$ ط : س + 2 > 3 ()

د - $\exists$ س $\exists$ ط : س + 2 $\geq$ 3 ()

السؤال الخامس :

أي الجمل التالية لا تمثل تطبيق متباين :

أ - $\forall$ س $\exists$ ص ، $\exists$ ص $\exists$ ص : ص = د (س)

ب - $\forall$ س 1 ، س 2 $\exists$ س ، س 1 = س 2 $\leftarrow$ د (س 1) = د (س 2)

ج - $\forall$ س 1 ، س 2 $\exists$ س ، د (س 1) $\neq$ د (س 2) $\leftarrow$ س 1 $\neq$ س 2

د - $\forall$ س 1 ، س 2 $\exists$ س ، س 1 $\neq$ س 2 $\leftarrow$ د (س 1) $\neq$ د (س 2)

السؤال السادس :

أي الجمل التالية تمثل الجدول المقابل :

0	0	1	1	ب
0	1	0	1	ج
0	1	1	1	؟؟

أ - $\neg$ (ب $\wedge$ ج)

ب - $\neg$ (ب $\vee$ ج)

ج - $\neg$ (ب $\wedge$ ج)

د - $\neg$ (ب $\wedge$ ج)

السؤال السابع :

نفي القضية «ذهب عادل إلى المدرسة وذهب حسام إلى المكتبة» هي:

- أ - () ذهب عادل إلى المدرسة ولم يذهب حسام إلى المكتبة.
- ب - () لم يذهب عادل إلى المدرسة أو ذهب حسام إلى المدرسة.
- ج - () لم يذهب عادل إلى المدرسة أو لم يذهب حسام إلى المكتبة.
- د - () لم يذهب عادل إلى المدرسة و لم يذهب حسام إلى المكتبة.

السؤال الثامن :

إذا كانت :

$$\text{ب : } 12 = 4 \times 3 , \text{ ج : } 9 = 2 + 5$$

فأي القضايا التالية خاطئة :

- أ - () ب $\vee$ ج
- ب - () ب $\wedge$ ج
- ج - () ج $\leftarrow$ ب
- د - () ج $\rightarrow$ ب

السؤال التاسع :

إذا كانت ب $\wedge$ (ج $\leftarrow$ ب) قضية خاطئة ، ب قضية صائبة فإن ج :

- أ - () قضية صائبة
- ب - () قضية خاطئة
- ج - () قضية مركبة
- د - () لا توجد إجابة مما سبق

السؤال العاشر :

استخدم جدول الصواب والخطأ لإثبات أن :

$$\overline{A} \leftarrow B \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$$

0	0	1	1	أ
0	1	0	1	ب

الأعداد الحقيقية

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول :

أكمل كل مما يأتي :

أ - $\dots = \frac{ج}{د} + \frac{1}{ب}$...

ب - $\dots = \frac{هـ}{و} + \frac{س}{ص}$...

ج - أصغر حد أعلى في $\{ -7, 3, \frac{3}{2}, 0 \}$ هو

د - أكبر حد أدنى في $[-1, 5]$ هو

السؤال الثاني :

أي الإجابات التالية خاطئة :

أ - $\frac{8}{3} = \frac{5}{س} + \frac{3}{س}$ ()

ب - $\frac{س + ص}{4ص} = \frac{س}{4} + \frac{4}{ص}$ ()

ج - $\frac{س + ص}{ص} = 1 + \frac{س}{ص}$ ()

د - $\frac{س + ص}{س ص} = \frac{1}{ص} + \frac{1}{س}$ ()

السؤال الثالث :

العدد الذي يكافئ العدد $\frac{3}{5}$ هو :

أ - $\frac{9}{15}$ ()

ب - $\frac{3}{5}$ ()

ج - $\frac{9}{25}$ ()

د - $\frac{6}{10}$ ()

السؤال الرابع :

أكبر عنصر في الفترة $[3, 5] \cup [-7, 4]$ هو :

أ - () 3

ب - () 4

ج - () 5

د - () لا يوجد

السؤال الخامس :

مجموعة الحل للمترابحة $2 \leq 5$ على شكل فترة هي :

أ - () $[-3, \infty]$

ب - () $[-7, \infty]$

ج - () $[-7, \infty]$

د - () $[-7, \infty]$

السؤال السادس :

إذا كان $1 \leq \frac{1-s}{3} < 2$ فإن :

أ - () $s \in [3, 6]$

ب - () $s \in [4, 7]$

ج - () $s \in [4, 5]$

د - () $s \in [4, 7]$

السؤال السابع :

إذا كان $0 < a$ فإن $|2s - a| > a$ تكافئ :

أ - () $0 < s < a$

ب - () $2 < s < a$

ج - () $a < s < 2a$

د - () $\frac{1}{2} < s < a$

السؤال الثامن :

الفترة $[1, 5] \cap]-3, 4]$ تساوي :

أ - $(1, 4]$

ب - $[-3, 5]$

ج - $[-3, 4]$

د - $[1, 4]$

السؤال التاسع :

$\frac{5}{8} < \frac{13}{15}$ لأن :

أ - $8 < 15$ ، $5 < 13$ ()

ب - $8 \times 5 < 15 \times 13$ ()

ج - $0 < \frac{5}{8} - \frac{13}{15}$ ()

د - $0 < \frac{13}{15} - \frac{5}{8}$ ()

السؤال العاشر :

إذا كانت $5 = 4 + (3 - س)$

فأي القضايا التالية صائبة :

أ - $س \in \{4, -2\}$ ()

ب - $س \in \{2, -6\}$ ()

ج - $س \in \{4, -4\}$ ()

د - $س \in \{2, 4\}$ ()

المعادلات والمتراجحات

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول :

أي الجمل التالية لا تمثل معادلة خط مستقيم :

أ - $(\quad) \quad 2 \text{ س} - 3 \text{ ص} = 5$

ب - $(\quad) \quad 7 \text{ ص} = 2 \text{ س} + 3$

ج - $(\quad) \quad \text{س} - \text{ص}^2 = 2$

د - $(\quad) \quad 1 = \frac{\text{ص}}{3} + \frac{\text{س}}{2}$

السؤال الثاني :

جملة المعادلتين $3 \text{ س} - 2 \text{ ص} = 5$

$6 \text{ س} - 4 \text{ ص} = 10$ تمثل :

أ - $(\quad)$ جملة متفقة (متسقة)

ب - $(\quad)$ جملة غير متفقة (غير متسقة)

ج - $(\quad)$ مستقيمين متوازيين

د - $(\quad)$ جملة لها حل وحيد

السؤال الثالث :

مجموعة الحل لجملة المعادلتين :

$2 \text{ س} - 3 \text{ ص} = 7$ ، $\text{س} + 3 \text{ ص} = 1$ هي :

أ - $(\quad) \quad \{(1, 2)\}$

ب - $(\quad) \quad \{(3-, 1-)\}$

ج - $(\quad) \quad \{(1-, 2)\}$

د - $(\quad) \quad \{(1, 5)\}$

السؤال الرابع :

مجموعة الحل لجملة المعادلتين :

$$س^2 + ص^2 = 13$$

$$س - 2 = 0$$

هي :

أ - () { 2 ، 3 ، -3 }

ب - () { (2 ، 3) ، (2 ، -3) }

ج - () { (0 ، 13) ، (2 ، 13) }

د - () { ص : ص^2 = 9 ، ص ∈ R }

السؤال الخامس :

اكتب المعادلة المكافئة للمعادلة التالية في أبسط صورة :

$$1 = \frac{س - 3}{3} + \frac{1 - س}{2}$$

السؤال السادس :

مثل مجموعة الحل للمترابطة التالية بيانياً على خط الأعداد الحقيقية :

$$3س - 1 \leq \frac{س + 3}{2}$$

هندسة المتجهات

ضع علامة (✓) أمام الإجابة الصحيحة لكل سؤال من الأسئلة التالية :

السؤال الأول :

ميل المستقيم الواصل بين النقطتين (3 ، 1) ، (1 ، -2) يساوي :

أ - $\frac{2}{3}$ ()

ب - $\frac{1}{2}$ ()

ج - $\frac{1}{4}$ ()

د - $\frac{3}{2}$ ()

السؤال الثاني :

إذا كان $\vec{AB} \sim \vec{CD}$ * فإن :

أ - $() \quad \vec{AB} = \vec{CD} + \vec{D}$

ب - $() \quad \text{طول } \vec{AD} = \text{طول } \vec{B\bar{C}}$

ج - $() \quad \text{الشكل } \vec{AB} \text{ جـ د متوازي أضلاع}$

د - $() \quad \text{الشكل } \vec{AB} \text{ د جـ متوازي أضلاع}$

السؤال الثالث :

إذا كانت $\vec{A} = (3 ، 2)$ ، $\vec{B} = (-1 ، 4)$ فإن :

$\vec{A} \cdot \vec{B} =$

أ - $() \quad (6 ، 2)$

ب - $() \quad 5$

ج - $() \quad (-3 ، 8)$

د - $() \quad 11$

السؤال الرابع :

إذا كان ميل المستقيم الواصل بين النقطتين (2 ، أ)، (3 ، 5) يوازي المستقيم ص = 2س + 1 فإن قيمة أ تساوي :

أ - () 2

ب - () 3

ج - () -3

د - () 1

السؤال الخامس :

إذا كانت أ = (- ج ، ج) ، ب = (3 ج ، -ج) فإن إحداثي منتصف $\overline{AB}$ هي :

أ - () $(\frac{3}{2} ج ، -ج)$

ب - () (2 ج ، 2 ج-)

ج - () (2 ج ، ج-)

د - () (ج ، ج-)

السؤال السادس :

طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (3 ، -2)، (-1 ، 2) هو :

أ - () (1 ، 0)

ب - () 2

ج - () $2\sqrt{4}$

د - () 4

السؤال السابع :

معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

$$2س - ص = 5$$

$$ص = 1 \text{ وميله يساوي } 1 \text{ هي :}$$

أ - () $ص = س + 5$

ب - () $ص - س + 2 = 0$

ج - () $ص + س = 1$

د - () $2ص - س = 0$

السؤال الثامن :

المعادلة $3ص - 6س + 1 = 0$ تمثل معادلة مستقيم :

أ - () يقطع محور الصادات في نقطة الأصل

ب - () ميله يساوي -2

ج - () يمر بالنقطة $(-1, 2)$

د - () يوازي المستقيم $ص = 2س - 7$

السؤال التاسع :

معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة $(2, 3)$ هي:

أ - () $ص = 3$

ب - () $س = 2$

ج - () $ص = \frac{3}{2}$

د - () $ص - 3 = س - 2$

المراجع

أولاً : المراجع العربية

ثانياً : المراجع الأجنبية

أولاً : المراجع العربية

- 1 - إبراهيم بسيوني عميرة : المنهج وعناصره، دار المعارف، القاهرة، ط1، 1986.
- 2 - أحمد الخطيب : الأهداف التعليمية، بحث مقدم إلى منظمة اليونسكو للدول العربية في الخليج، الدوحة، 1983.
- 3 - أحمد العريض الشارف : المدخل لتدريس الرياضيات، الجامعة المفتوحة، طرابلس، 1977.
- 4 - أحمد حسن عبيد : فلسفة النظام التعليمي وبنية السياسة التربوية، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ط1، 1976.
- 5 - أحمد خيرى كاظم، سعد يس زكي : تدريس العلوم، دار النهضة العربية، القاهرة، 1981.
- 6 - أحمد زكي صالح : علم النفس التربوي، مكتبة النهضة العربية، القاهرة، ط11، 1966.
- 7 - أحمد عزت راجح : أصول علم النفس، الدار القومية للطباعة والنشر، القاهرة، ط5، 1963.
- 8 - أحمد فؤاد باشا : التراث العلمي للحضارة الإسلامية، دار الكتب، القاهرة، ط1، 1983.
- 9 - الدمرداش سرحان : المناهج المعاصرة، مكتبة الفلاح، الكويت، 1979.
- 10 - المكتب العالمي للبحوث : الرياضة لغة العلم، دار مكتبة الحياة للطباعة والنشر، سوريا، 1983.
- 11 - ح. أ. فريدي (ترجمة) أحمد صادق الفرمانى ورمضان اجهيمه: نظرية حساب التفاضل والتكامل، منشورات جامعة الفاتح، طرابلس، 1991.

- 12 - جابر عبد الحميد جابر، أحمد خيرى كاظم : مناهج البحث في التربية وعلم النفس، دار النهضة العربية، القاهرة، ط2، 1978.
- 13 - جابر عبد الحميد جابر : سيكولوجية التعلم، دار النهضة العربية، القاهرة، 1982.
- 14 - _____ : التعلم وتكنولوجيا التعلم، دار النهضة العربية، القاهرة، 1979.
- 15 - حيدر المومني (ترجمة): «العصر الذهبي للرياضيات»، مجلة نيوسينتست، العدد 1452، آفاق علمية 7، سبتمبر - أكتوبر 1986، من ص18-21.
- 16 - ديوبولد فان دالين (ترجمة) محمد نبيل نوفل وآخرون: مناهج البحث في التربية وعلم النفس، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، 1969.
- 17 - رشدي لبيب : معلم العلوم، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، 1974.
- 18 - سمير ياسين يوسف : الرياضيات والبحث عن المعرفة، دار الشئون الثقافية العامة، بغداد، 1987.
- 19 - صالح العقيلي، خالد أمين، علي المدني : الحاسوب (المعدات والبرمجيات) دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، 1990.
- 20 - صلاح عبد السلام الخراشي : تقويم تحصيل طلاب الصف الرابع بدور المعلمين للمفاهيم المتضمنة في مقرر الرياضيات المعاصرة، رسالة ماجستير غير منشورة، جامعة عين شمس، كلية البنات، 1978.
- 21 - طلعت همام : سين وجيم من علم النفس التربوي، مؤسسة الرسالة، دار عمار، عمان، 1984.

- 22 - عادل حسن : التنظيم الصناعي وإدارة الإنتاج، مؤسسة شباب الجامعة، الإسكندرية، 1988.
- 23 - عاطف أحمد منصور : الرياضيات المسلية، مكتبة ابن سينا، القاهرة، ط2، 1992.
- 24 - عبد الفتاح حجاج، سليمان الخضري: دراسة تقييمية لبرنامج إعداد معلمي المرحلة الإعدادية والثانوية، مركز البحوث التربوية، جامعة قطر، الدوحة، 1984.
- 25 - عمر فروخ، ماهر عبد القادر، إحسان الحلاق : تاريخ العلوم عند العرب، دار النهضة العربية، بيروت، 1990.
- 26 - عبد الله منسي العمري : تاريخ العلم عند العرب، دار مجدلاوي، عمان، الأردن، ط1، 1990.
- 27 - غالب الطويل : دراسة لبعض العوامل المسهمة في عدم إقبال الطلاب على دراسة الرياضيات في المرحلة الثانوية بدولة قطر، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التربية، جامعة طنطا، 1988.
- 28 - _____ : فعالية استخدام أسلوب دورة التعلم على تنمية التفكير الرياضي والاتجاه نحو الرياضيات والتحصيل فيها لدى عينة من طلاب الصف الأول الثانوي بدولة قطر، رسالة دكتوراه غير منشورة، كلية التربية، جامعة طنطا، 1991.
- 29 - _____ : طبيعة وفلسفة الرياضيات، مجلة أبحاث تصدر عن جامعة التحدي، العدد 2، سرت، 1997.
- 30 - فارعة حسن سليمان، أحمد اللقاني : التدريس الفعال، عالم الكتب، القاهرة، ط1، 1985.

- 31 - فاروق عبد السلام، ممدوح سليمان : دراسة لبعض المتغيرات المتصلة بالاتجاه نحو الرياضيات، مكة المكرمة، جامعة أم القرى، كلية التربية، 1982.
- 32 - فايز مراد مينا : قضايا في تعليم وتعلم الرياضيات، دار الثقافة للطباعة والنشر، القاهرة، 1982.
- 33 - فخر الدين القلا : إعداد المعلم العربي وتدريبه على استخدام التكنولوجيا الحديثة في التعليم، المجلة العربية للتربية، المجلد السابع، العدد الثاني، تونس، سبتمبر 1987 ص ص 8-30.
- 34 - فريد كامل أبو زينه : الرياضيات، مناهجها وأصول تدريسها، دار الفرقان للنشر والتوزيع، عمان، 1988.
- 35 - فريدريك هـ. بل (ترجمة) محمد المفتي، ممدوح سليمان : طرق تدريس الرياضيات، الدار العربية للنشر والتوزيع، القاهرة، ط1، 1986.
- 36 - فؤاد أبو حطب: القدرات العقلية، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، 1973.
- 37 - فؤاد قلاده : أساسيات المناهج في التعليم الرسمي وتعليم الكبار، دار المعارف، القاهرة، 1981.
- 38 - مالفن ل بيتجز (ترجمة) سليم الكتبي، فاضل جواد : منطق وبرهان، جامعة البصرة، 1983.
- 39 - محمد علي الخولي : قاموس التربية، دار العلم للملايين، بيروت، 1981.
- 40 - مجدي عزيز إبراهيم : تدريس الرياضيات في التعليم قبل الجامعي، مكتبة النهضة المصرية، القاهرة، 1985.
- 41 - _____ : أساليب وطرائق في تدريس الرياضيات، مكتبة

الأنجلو المصرية، القاهرة، ط1، 1988.

42 - مجدي عزيز إبراهيم : فاعلية برنامج تعليمي مقترح لتنمية المهارات الرياضية اللازمة لدراسة وحدة استخدام الحواس في اكتشاف البيئة، الكتاب السنوي في التربية وعلم النفس، دار الثقافة للطباعة والنشر، المجلد 15، القاهرة، 1988، ص ص 416-418.

43 - معصومة كاظم، وليم عبيد، محمود شوق : أساسيات تدريس الرياضيات، دار المعارف، القاهرة، 1969.

44 - ناتان اكورث (ترجمة) عبد الحميد لطفي : دار النهضة المصرية، القاهرة، 1965.

45 - ناجي ديسقورس، إبراهيم عساف : استراتيجيات في تعليم وتعلم الرياضيات، مكتبة جامعة طنطا، القاهرة، 1988.

46 - نبيلة زكي، ناجي ديسقورس : تدريس الرياضيات، دلتا للطباعة والتصوير، طنطا، 1988.

47 - نجيب الحصادي : أسس المنطق الرمزي المعاصر، دار النهضة العربية، بيروت، ط1، 1993.

48 - نظلة حسن خضر : أصول تدريس الرياضيات، عالم الكتب، القاهرة، 1984.

49 - نورمان جروتلند (ترجمة) أحمد خيرى كاظم : الأهداف التعليمية تحديدها السلوكي وتطبيقاتها، دار النهضة العربية، القاهرة، 1977.

50 - وليم شرام (مترجم) : التعليم المبرمج اليوم وغدا، مكتبة نهضة مصر، القاهرة، 1966.

- 51 - وليم عبيد، محمد المفتي، سمير ايليا : تربويات الرياضيات، مكتبة الأنجلو المصرية، القاهرة، ط2، 1989.
- 52 - يحيى هندام : تدريس الرياضيات، دار النهضة العربية، القاهرة، 1982.
- 53 - يوسف الحسيني إمام : أثر تدريس موضوعات في تاريخ الرياضيات لطلاب كلية التربية في تعديل اتجاهاتهم نحو الرياضيات، رسالة ماجستير غير منشورة، كلية التربية، جامعة طنطا، 1981.

ثانياً : المراجع الأجنبية :

- 54 - Aichele & Reys: Reading in Secondary School Mathematics, 1977, PP. 263-271.
- 55 - Alkin, M.C.: Products for Improving Educational Evaluation, UCLA Evaluation Comment, Vol.2, No.3, Sep. 1970, PP. 1-15.
- 56 - Bell, F.H.:Can Computer Really Improve School Mathematics, Mathematics Teacher, 1978, 7, (5), PP. 438-432.
- 57 - Bloom, B.S. MD, Engelhart, E.J. Furst, W.H, Hill & D.R. Krathwohl," Taxonomy of Educational Objectives Hand book 1, Cognitive Domain, New York, David Mckay, 1956.
- 58 - Bruner, Y.S: "The Act of Discovery" Harvard Educ, Rev. 1961, (13), 21-32.
- 59 - Butler, C.H, Wern, F.L.Y.N, Wood: "The Teaching of Secondary Mathematics, Mc-Graw Hill Book Company, 4th ed, New York, 1965.
- 60 - Cambridge Conference On School Mathematics "Goals for Mathematics", Boston, Houghlon Mifflin, 1963.
- 61 - David, E.A.: Model for Understanding in Mathematics Teacher, Sep, 1978, PP. 13-17.
- 62 - El-Tom, M.: Mathematical Science Curricula Project for Arab Universities (Report on the Preparatory Meeting of the Projects Committee), Cairo, 18-19 December, 1988, PP.29-30.

- 63 - Eves, Howard, Carroll, V. New Som: An Introduction to the Foundation and Fundamental Concepts of Mathematics, Holt Rinehart and Winston Inc, 3rd, ed, New York, 1970.
- 64 - Finney, R.L., Thomas, Jr,G.: Calculus, Addison, Wesley Publishing Company Inc, U.S.A, 1990.
- 65 - Gangne R.: "The Conditions of Learning", Holt Rinehart and Winston Inc, 2nd ed, 1970.
- 66 - Good, C.V. & Merked, W.R. (ed): "Dictionary of Education, 3rd (ed), Mac-Grow Hill, 1983.
- 67 - Henderson, K.: "Concepts in the Teaching of Secondary School Mathematics, 3rd Year Book of N.C.T.M, 1970, Chap. 7.
- 68 - Kano, R.B.: "On the Proof Making Task", Mathematics Teacher, February, 1975.
- 69 - Krathwohl, D.R. Bloom, B.S. & Masia, B.B.: "Taxonomy of Educational Objectives, Handbook II, Affective Domain, New York, Mckay, 1961.
- 70 - Lester, F.K.: Some Ideas about Research Methodologies in Mathematics Education, Journal for Research in Mathematics Education, No. 10, 1979, PP. 228-232.
- 71 - Lovell, K.: "The Growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children, 5th ed, London, University of London Press, L.T.P, 1971, PP. 13-14.

- 72 - Mathews, D.K.: "Measurement in Physical Education
Saunders's Comp, London, 1978, P.1.
- 73 - Merrill, M.: "Concept Teaching, An Instruction Design Guide,
1979, P.12.
- 74 - Richard, T.L.: "A General Catalogue of Teaching Skills,
School of Education, 1973, PP. 3-4.
- 75 - Rokeach, M.: Beliefs Attitudes and Values San; Francisco,
Jossey-Bass, 1972.
- 76 - Skinner, B.F." The Technology of Teaching", New York,
Appleton Century Crofts, 1968.
- 77 - Smith, E.: "Comprehension and Learning" New York, Holt
Rinehart, and Winston, 1975.
- 78 - Wiley, D.E.: "Design and Analysis of Evaluation Studies, Holt
Rinehart and Winston, N.Y, 1970, PP. 259-
269.

فهرس الكتاب

فهرست

الصفحة

الموضوع

أ - ج

35-1

3

5

8

13

15

21

78-37

40

49

56

65

68

72

107-79

81

91

103

130-109

112

114

117

تقديم

الفصل الأول : الأهداف التربوية

ما المقصود بالهدف التربوي

مصادر اشتقاق الأهداف التربوية

أهداف تدريس الرياضيات

أهداف تدريس الحاسوب

الأهداف السلوكية

تصنيف الأهداف

الفصل الثاني : طبيعة وفلسفة الرياضيات

طبيعة الرياضيات

فلسفة الرياضيات

اتجاهات حديثة في تدريس الرياضيات

طريقة التدريس

مميزات طرائق التدريس المطلوبة

بعض التطورات الحديثة في الرياضيات

الفصل الثالث : تطور الفكر الرياضي

العوامل التي ساعدت على تطور الفكر الرياضي

تطور الفكر الرياضي لدى علماء المسلمين

تطورات حديثة في الفكر الرياضي

الفصل الرابع : المفاهيم

معنى المفهوم

تكوين المفهوم

تصنيفات أخرى للمفاهيم

1/2 ساعة

الموضوع

الصفحة

119	تصنيفات المفاهيم حسب وظيفتها
122	أهمية استخدام المفاهيم
124	استراتيجيات تدريس المفاهيم
126	درس في تقديم المفهوم
157-131	الفصل الخامس : التعميمات
136	أنواع التعميمات
137	تعلم التعميم أو القاعدة
139	تقويم اكتساب التعميم
143	استراتيجيات تدريس التعميم
150	درس في تقديم التعميم
196-159	الفصل السادس : البرهان
161	ما هو البرهان
165	أنواع البراهين
176	استراتيجيات تدريس البرهان
188	درس نموذجي في طرائق البرهان
230-197	الفصل السابع : المهارات
203	تعريف المهارة
204	أنواع المهارات
208	أسباب القصور في المهارات الرياضية
211	المهارات الأساسية الضرورية
214	استراتيجيات تدريس المهارات
220	درس في الدوال الدائرية
256-231	الفصل الثامن : التعليم البرنامجي
235	ما هو التعليم البرنامجي

الصفحة

الموضوع

236	المبادئ التي ينبغي عليها التعليم المبرمج
238	مميزات وخصائص التعليم المبرمج
240	نواحي القصور في التعليم المبرمج
241	أنواع البرامج التعليمية
248	برنامج في الأسس
251	برنامج في اللوغاريتمات
291-257	الفصل التاسع : الألعاب في تدريس الرياضيات
260	الألعاب في الرياضيات
262	معايير استخدام استراتيجيات الألعاب
265	نماذج لألعاب تدريسية
288	المربعات السحرية
336-293	الفصل العاشر : تقويم التدريس
295	ما المقصود بعملية التقويم
297	أنماط التقويم
300	أدوات التقويم
301	صفات الاختيار الجيد
303	كيفية بناء المقياس أو الاختبار
304	نموذج لبناء المقياس
306	إعداد مقياس الاتجاه نحو الرياضيات
318	الاختبارات التحصيلية
324	اختبار التحصيل في الرياضيات
337	المراجع العربية والأجنبية
349	فهرس الكتاب



د . غالب محمود الطويل

● بكالوريوس رياضيات وتربية من جامعة
عين شمس عام 1970 ف.

● ماجستير في التربية (مناهج وطرق
تدريس الرياضيات) جامعة طنطا
عام 1988 ف.

● دكتوراه الفلسفة في التربية (مناهج
وطرق تدريس الرياضيات) جامعة
طنطا عام 1991 ف.

لما كانت الرياضيات بمفهومها الفلسفي لعبة فنحن بحاجة إلى
اللاعب (الطالب) الذي يستطيع أن ينفذ استراتيجيات وتعاليم المدرس.
هذا المعلم يجب أن يكون لديه الخبرة الكافية والخلفية العلمية لهذه
المهنة ومعرفة بأبنائه اللاعبين (الطلاب) وكذلك بحاجة إلى المدير
الفني والمسئول الإداري وأعضاء هيئة الفريق (الادارة المدرسية)
والذين يتمتعون بصفة الادارة الجيدة ومعرفة بطبيعة المهنة المثقاة
على عاتقهم وتوفيرهم ما يتطلبه هذا الجهد من أدوات ووسائل جيدة
(الكتاب المدرسي - المكتبة العلمية) ، والفريق بحاجة إلى مساندة
الجمهور (المؤسسات التربوية والاعلامية) وصولاً إلى تحقيق الأهداف .

تلك هي الرياضيات التي نأمل أن يتعلق بها أبنائنا من هذا الجيل كي
نعيد عهد الأجداد من جديد بإذن الله.